Thème : Fonction de survie - Correction

Préliminaires $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, donc S_X est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} S_X(x) = 1 - 1 = 0$.

Partie I 1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, P(X = k) = 0.P(X = 0) + \sum\limits_{k=1}^{n} k\,\big(P(X > k - 1) - P(X > k)\big)$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X > k - 1) - \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X > k)$ (avec $k' = k - 1$) $= \sum\limits_{k'=0}^{n-1} (k + 1)P(X > k) - \sum\limits_{k=1}^{n} k.P(X > k)$

$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} k.P(X \geq k) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k) - \sum\limits_{k=1}^{n} k.P(X > k)$

$= 0.P(X > 0) - n.P(X > n) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X > k) - (n + 1)P(X > n)$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} S_X(k) - (n + 1)P(X \geq n + 1)$. D'où le résultat **(Ou par récurrence)**

2. Si $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ alors $P(X \geq n + 1) = 0$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k.P(X = k) = E(X)$.

L'égalité devient : $\sum\limits_{k=0}^{n} S_X(k) = E(X)$ (c'est-à-dire $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X > k) = E(X)$) **(voir exercice 1 feuille 2 chapitre 6)**

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S_X(k)$ et $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\, P(X = k)$.

$\sum\limits_{n \geq 0} S_X(n)$ est une série à termes positifs. Si elle converge, sa somme partielle est majorée par un réel M.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq M$.

Or l'égalité du 1) s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = (n + 1)P(X \geq n + 1) + U_n$ et $(n + 1)P(X \geq n + 1) \geq 0$

donc $U_n \leq T_n \leq M$. $\sum\limits_{n \geq 0} kP(X = k)$ est aussi une série à termes positifs, dont la somme partielle est majorée.

Elle est donc convergente (absolument). Donc X admet une espérance.

4. Si X admet une espérance : a) $\forall\, k \geq n + 1$ $k \geq n + 1 \Rightarrow k.P(X = k) \geq (n + 1)PX = k)$ (car $P(X = k) \geq 0$).

Donc $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k) \geq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (n + 1)P(X = k)$ $\quad \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k) \geq (n + 1) \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$

$\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k) \geq (n + 1)P(X \geq n + 1)$.

b) $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k.P(X = k) - \sum\limits_{k=0}^{n} k.P(X = k)$. **(voir ex. 3 feuille 1 chapitre 4)**

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} k.P(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k.P(X = k)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k) = 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (n + 1)P(X \geq n + 1) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1)P(X \geq n + 1) = 0$.

b) Si X admet une espérance, on a donc :

$T_n = (n+1)P(X \geq n+1) + U_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k.P(X= k) = E(X)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)P(X \geq n+1) = 0$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = E(X)$. Donc la série $\sum\limits_{n \geq 0} S_X(n)$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = E(X)$.

Partie II a) X est une variable à densité, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus f est continue sur $]0; +\infty[$, donc F_X est de classe C^1 sur cet intervalle.
Comme $S_X = 1 - F_X$, S_X est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

b) Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = S_X(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = - f(x) \text{ (car } S_X = 1 - F_X) \\ v(x) = x \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur [0;A]. (car f continue à droite en 0)

Donc $\int_0^A S_X(x)dx = [xS_X(x)]_0^A + \int_0^A x.f(x)dx$

$\int_0^A S_X(x)dx = A.S_X(A) - 0.S_X(0) + \int_0^A x.f(x)dx = A.S_X(A) + \int_0^A x.f(x)\,dx$.

c) $\forall A \geq 0 \quad A.S_X(A) \geq 0$ donc $\int_0^A x.f(x)\,dx \leq \int_0^A S_X(x)\,dx$

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x)$ converge, la fonction étant positive, $\int_0^A S_X(x)\,dx$ est majorée par un réel M. Donc $\int_0^A xf(x)\,dx$ est aussi majoré par M.

Comme la fonction $x \longmapsto x.f(x)$ est positive, $\int_0^{+\infty} x.f(x)$ est convergente. Donc X admet une espérance.

d) Si X admet une espérance : $\forall x \geq A \quad x.f(x) \geq A.f(x)$ (car f positive)
donc par croissance de l'intégrale, $\int_A^{+\infty} x.f(x)\,dx \geq A\int_A^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_A^{+\infty} x.f(x)\,dx \geq A.S_X(A)$.

e) Si X admet une espérance,
$\int_A^{+\infty} x.f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x.f(x)\,dx - \int_0^A x.f(x)dx$ donc **(voir ex 2 feuille 1 chapitre 12)**

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} x.f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x.f(x)\,dx - \int_0^{+\infty} x.f(x)\,dx = 0$.

Comme $0 \leq A.S_X(A) \leq \int_A^{+\infty} x.f(x)\,dx$, par encadrement $\lim\limits_{A \to +\infty} A.S_X(A) = 0$

Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A S_X(x) = 0 + \int_0^{+\infty} x.f(x)dx = E(X)$. Donc $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ est convergente et vaut E(X).

Donc $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ est convergente si et seulement si E(X) existe, et dans ce cas, $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x)dx$.

Complément :

1. si $h \geq 0$, $P_{(X \geq t)}(t \leq X < t + h) = \dfrac{P\big((X \geq t) \cap (t \leq X < t + h)\big)}{P(X \geq t)} = \dfrac{P(t \leq X < t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{F_X(t + h) - F_X(t)}{S_X(t)}$

Donc $\dfrac{P_{(X \geq t)}(t \leq X < t + h)}{h} = \dfrac{1}{S_X(t)} \dfrac{F_X(t + h) - F_X(t)}{h}$

Or F_X est dérivable en t, donc $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F_X(t + h) - F_X(t)}{h} = F_X'(t) = f(t)$

Donc $\lambda(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{P_{(X \geq t)}(t \leq X < t + h)}{h} = \dfrac{f(t)}{S_X(t)}$.

2. a) $\forall t \geq 0$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du = \int_0^t \dfrac{f(u)}{S_X(u)}\,du = - \int_0^t \dfrac{- f(u)}{S_X(u)}du$ (et on sait que $S_X' = -f$)

Donc $\Lambda(t) = [- \ln(S_X(u))]_0^t = - \ln(S_X(t)) + \ln(S_X(0)) = - \ln(S_X(t)) + \ln(P(X > 0)) = - \ln(S_X(t)) + \ln(1)$
$= - \ln(S_X(t))$

b) Donc $\ln(S_X(t)) = -\Lambda(t) \quad S_X(t) = \exp(- \Lambda(t))$
Or la fonction λ est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc Λ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $\Lambda' = \lambda$.
Donc $S_X'(t) = - \lambda(t) \exp(- \Lambda(t)) \qquad - f(t) = - \lambda(t) \exp(- \Lambda(t)) \qquad f(t) = \lambda(t)\exp(- \Lambda(t))$