Thème niveau 2 : Espérance et fonction de survie

Rappels :

_ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à **valeurs positives**.

Alors la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ **converge** si et seulement si la somme partielle $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ **est majorée**.

_ Soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$ et **positive sur** $[a;+\infty[$.
Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **converge** si et seulement si la fonction $X \longmapsto \int_a^X f(x)dx$ **est majorée**.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
On note S_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $S_X(x) = P(X > x)$.

Préliminaires
Justifier la monotonie de la fonction S_X sur $\mathbb{R}$ et trouver la limite de $S_X(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie I
Dans cette partie, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
1. Etablir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = (n+1)P(X \geq n+1) + \sum_{k=0}^{n} k.P(X=k)$$

2. Dans le cas particulier où $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$, que devient cette formule ?

Revenons au cas général $X(\Omega) = \mathbb{N}$:
3. Si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, montrer que X admet une espérance.
4. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X=k) \geq (n+1)P(X \geq n+1)$.

En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)P(X \geq n+1) = 0$.

b) En déduire, que si X admet une espérance, alors la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, et exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction S_X.

Partie II
Dans cette partie, on suppose que X admet une densité f nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $]0,+\infty[$ et continue à droite en 0.
a) Montrer que la fonction S_X est continue sur $\mathbb{R}$ et que sa restriction à $[0\,;+\infty[$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
b) Etablir pour tout réel $A > 0$, l'égalité : $\int_0^A S_X(x)\,dx = AS_X(A) + \int_0^A x.f(x)\,dx$.

c) En déduire que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ est convergente, alors X admet une espérance.

d) Montrer que si X admet une espérance, alors on a pour tout réel $A > 0$:

$$\int_A^{+\infty} x.f(x)\,dx \geq AS_X(A).$$

e) Déduire des résultats précédents que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ est convergente, et que dans ce cas, on a : $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$.

Conclusion :

_ Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$, alors

$$\mathbf{E(X) = \sum_{n=0}^{N} P(X > n).}$$

_ Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ converge et dans ce cas,

$$\mathbf{E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).}$$

_ Si X est une variable à densité, à valeurs positives, et de densité f continue sur $]0; +\infty[$, alors X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(X > x)dx$ est convergente, et dans ce cas :

$$\mathbf{E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx}$$

Complément : Taux de hasard

Reprenons la situation où X admet une densité f nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $]0,+\infty[$ et continue à droite en 0.

1. Pour $t \in [0;+\infty[$, on note $\lambda(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{P_{(X \geq t)}(t \leq X < t + h)}{h}$.

Montrer que $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{S_X(t)}$.

2. On appelle taux de hasard cumulé la fonction Λ définie par : $\forall\, t \geq 0$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$.

a) Montrer que $\forall\, t \geq 0$, $\Lambda(t) = -\ln(S_X(t))$

b) En déduire que $\forall\, t \geq 0$, $f(t) = \lambda(t)\exp\big(-\Lambda(t)\big)$.