Thème Fonctions génératrices - Correction

I. Fonction génératrice d'une variable finie

1. D'après le théorème de transfert, $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{i=0}^{n} t^i P(X = i)$

2. a) Donc $G_X(1) = \sum_{i=0}^{n} 1^i P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$ (car $(X = i)_{0 \le i \le n}$ S.C.E.)

b) G_X est un polynôme en t, donc est de classe C^∞ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X'(t) = \sum_{i=1}^{n} i.t^{i-1}P(X = i)$

donc $G_X'(1) = \sum_{i=1}^{n} i.P(X= i)$. Or $E(X) = \sum_{i=0}^{n} i.P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i.P(X= i)$ donc $G_X'(1) = E(X)$.

c) De même, $G_X''(t) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)t^{i-2}P(X = i)$ donc

$G_X''(1) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)P(X= i) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$

donc $E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1)$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

3) a) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$ $(t^k)^{(j)} = \begin{cases} 0 \text{ si } k < j \\ k(k-1)\dots(k-j+1)t^{k-j} = \dfrac{k!}{(k-j)!}\ t^{k-j} \text{ si } k \ge j \end{cases}$

b) donc $G_X^{(j)}(t) = \sum_{i=j}^{n} \dfrac{i!}{(i-j)!} t^{i-j} P(X = i)$

$= j!\, P(X = j) + (j+1)!\, P(X = j+1)\, t + \dots + \dfrac{n!}{(n-j)!} P(X = n)\, t^{n-j}$

c) Donc $G_X^{(j)}(0) = j!P(X= j)$. (les autres termes s'annulent).

Donc $P(X= j) = \dfrac{G_X^{(j)}(0)}{j!}$ la loi de X est entièrement déterminée par G.

4. $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = E(t^Y) = E(t^{aX+b}) = E\big((t^a)^X t^b\big) = t^b E\big((t^a)^X\big) = t^b G_X(t^a)$.

5. Si $X \longrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

$G_X(t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (tp)^i (1-p)^{n-i} = (tp + 1 - p)^n$ (formule du binôme)

II. Fonction génératrice d'une variable discrète

1. $\sum t^i P(X = i)$ converge absolument ?

$-1 \le t \le 1$ donc $|t^i| \le 1$ et $|t^i P(X = i)| \le P(X= i)$

$\sum P(X = i)$ converge (la somme vaut 1) donc $\sum |t^i P(X = i)|$ aussi. Donc la série est absolument convergente.

D'après le théorème de transfert, $Y= t^X$ admet une espérance et $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i P(X = i)$.

2. a) Si $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$: $G_X(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} t^i (1-p)^{i-1} p = pt \sum_{i=1}^{+\infty} t^{i-1}(1-p)^{i-1}$

$(i' = i - 1)$ $= pt \sum_{i'=0}^{+\infty} (t(1-p))^{i'} = pt \times \dfrac{1}{1 - t(1-p)} = \dfrac{pt}{1 - t + tp}$

(Il y a convergence ssi $-1 < t(1-p) < 1$ c'est-à-dire $-\dfrac{1}{1-p} < t < \dfrac{1}{1-p}$)

b) G_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$

Par récurrence immédiate, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $G_X^{(j)}(t) = \lambda^j e^{\lambda(t-1)}$ donc $G_X^{(j)}(0) = \lambda^j e^{-\lambda}$.

Donc $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $P(X = j) = \dfrac{G_X^{(j)}(0)}{j!} = \dfrac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$. Donc $X \longrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$