Thème : Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On appelle fonction génératrice de X la fonction qui à un réel t associe $\mathbf{G_X(t) = E(t^X)}$ (quand cette espérance existe).

I. Fonction génératrice d'une variable finie

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \{0, \ldots, n\}$.
Dans ce cas, la fonction génératrice G_X est donc définie sur $\mathbb{R}$.
1. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $G_X(t)$ à l'aide d'une somme.
2. a. Calculer $G_X(1)$.
b) Pour $t \in \mathbb{R}$, déterminer $G_X'(t)$ puis montrer que $G_X'(1) = E(X)$.
c) Exprimer $V(X)$ en fonction de $G_X''(1)$ et de $G_X'(1)$.
3. a) Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\ t \in \mathbb{R}, g_k(t) = t^k$.
Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. Déterminer l'expression de $g_k^{(j)}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
b) Pour tout j de $\{0, \ldots, n\}$, et $t \in \mathbb{R}$, calculer $G_X^{(j)}(t)$.
c) Calculer $G_X^{(j)}(0)$ et en déduire que : $\forall\ j \in \{0,\ldots,n\}$, $P(X = j) = \dfrac{G_X^{(j)}(0)}{j!}$.
La loi de X est donc entièrement déterminée par G (d'où le nom de "fonction génératrice").
4. Soit a et b deux réels. On pose $Y = aX + b$. Montrer que $\forall\ t \in \mathbb{R}, G_Y(t) = t^b.G_X(t^a)$
5. Exemple : Soit $X \longrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ $(n \geq 1, p \in\ ]0;1[$. Montrer que $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$.

II. Fonction génératrice d'une variable discrète

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
1. A l'aide d'une majoration, montrer que $\forall\ t \in [-1;1]$, $G_X(t)$ existe.
On peut montrer qu'on a également : $\forall j \in \mathbb{N}, P(X = j) = \dfrac{G_X^{(j)}(0)}{j!}$.
si X admet une espérance alors $E(X) = G_X'(1)$;*si X admet une variance :* $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$
2. Exemples :
a) Soit $p \in\ ]0;1[$ et $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$. Déterminer la fonction génératrice de X (on précisera l'ensemble de définition).
b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que : $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
Déterminer la loi de X.

Exemples de sujets : **HEC 2009, Ecricome 2008, HEC 2019**