

1. Valeurs absolues

Rappels : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x| \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

$$|x \cdot y| = |x| |y| \quad \text{si } y \neq 0, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}, |x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = \begin{cases} -a & \text{si } a > 0 \\ x = 0 & \text{si } a = 0 \\ \emptyset & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad |x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq a & \text{si } a \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$1. y = (y - x) + x \text{ donc par inégalité triangulaire } |y| \leq |y - x| + |x| \quad |y| - |x| \leq |y - x|$$

$$\text{De même, } x = (x - y) + y \text{ donc } |x| \leq |x - y| + |y| \quad |x| - |y| \leq |x - y| \quad |x| - |y| \leq |y - x|$$

$$\text{Donc } |y| - |x| \geq -|y - x|$$

$$\text{Donc } -|y - x| \leq |y| - |x| \leq |y - x| \quad \text{c'est-à-dire : } ||y| - |x|| \leq |y - x|$$

$$||y| - |x|| \leq |y - x| \Leftrightarrow -|y - x| \leq |y| - |x| \leq |y - x| \quad \text{Donc } ||y| - |x|| \leq |y - x|.$$

$$2. |E(X)| = \left| \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| P(X = x_i) = E(|X|) \text{ (par théorème de transfert).}$$

de transfert).

$$3. V(X) \geq 0 \text{ donc } E(X^2) - E(X)^2 \geq 0 \quad E(X^2) \geq E(X)^2$$

$$\text{Par croissance de la fonction racine carrée : } \sqrt{E(X^2)} \geq \sqrt{E(X)^2} \quad \sqrt{E(X^2)} \geq |E(X)|$$

2. Inégalités de Cauchy-Schwarz

$$1) P(t) = \sum_{k=1}^n (tx_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (t^2 x_k^2 + 2tx_k y_k + y_k^2) = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) t^2 + \left(2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) t + \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

$$2) \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (tx_k + y_k)^2 \geq 0 \text{ donc } P(t) \geq 0.$$

P est de signe constant sur $\mathbb{R}$ donc $\Delta \leq 0$.

$$3) \Delta = 4 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \leq 0 \text{ donc } \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

$$\text{donc } \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)} \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

4) Il y a égalité si et seulement si $\Delta = 0$: dans ce cas, le polynôme a une racine t_0 :

$$\text{Il existe } t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{k=1}^n (t_0 x_k + y_k)^2 = 0$$

Une somme de nombre positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls.

$$\text{Donc } \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (t_0 x_k + y_k)^2 = 0 \text{ donc } t_0 x_k + y_k = 0 \quad y_k = -t_0 x_k \quad \lambda = -t_0 \text{ convient.}$$

Inversement, si $\forall k \in \{1, \dots, n\}, y_k = \lambda x_k$, alors :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \lambda x_k \right| = |\lambda| \left| \sum_{k=1}^n x_k^2 \right| \text{ et}$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = |\lambda| \left| \sum_{k=1}^n x_k^2 \right|$$

Il y a bien égalité.

3. Convexité

1) Avec $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ on a bien $t_1 \in [0;1]$, $t_2 \in [0;1]$ et $t_1 + t_2 = 1$

$$\text{Donc } f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

2) a) Avec $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$, on a bien $0 \leq t_i \leq 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $t_1 + \dots + t_n = 1$, donc

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f(x_i) \quad f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

L'image de la moyenne est inférieure à la moyenne des images.

b) Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$$f(E(X)) = f\left(\sum_{i=1}^n P(X = x_i)x_i\right)$$

$$\text{Or } \forall i \in \{1, \dots, n\} P(X = x_i) \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1 \text{ donc } f\left(\sum_{i=1}^n P(X = x_i)x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(X = x_i)f(x_i) = E(f(X))$$

(d'après le théorème de transfert)

3. a) pour $n = 1$ soit $t_1 \geq 0$ avec $t_1 = 1$ $f(t_1 x_1) = f(x_1)$ $t_1 f(x_1) = f(x_1)$ donc l'inégalité est vraie

b) Soit $(t_1, \dots, t_{n+1})$ positifs tels que $t_1 + \dots + t_{n+1} = 1$

$$\text{si } t_{n+1} > 0, \text{ alors } t_n + t_{n+1} > 0 \quad \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + (t_n + t_{n+1}) \left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1} \right)$$

$$\text{Posons } t_n' = t_n + t_{n+1} \text{ (donc } t_n' \geq 0) \text{ et } x_n' = \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + t_n' x_n' \text{ Il y a } n \text{ termes dans la somme avec } \sum_{i=1}^{n-1} t_i + t_n' = \sum_{i=1}^{n-1} t_i + t_n + t_{n+1} = 1$$

$$\text{D'après l'hypothèse de l'énoncé : } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + t_n' x_n'\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i) + t_n' f(x_n')$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i) + (t_n + t_{n+1}) f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right)$$

De plus, $\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} \geq 0$, $\frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} \geq 0$ et $\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} = 1$ donc, comme f est convexe :

$$f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}\right) \leq \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} f(x_{n+1})$$

$$\text{Donc : } f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i) + (t_n + t_{n+1}) \left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} f(x_{n+1}) \right)$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i) + t_n f(x_n) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$$

si $t_{n+1} = 0$: $\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ et $t_1 + \dots + t_n = 1 - t_{n+1} = 1$

Donc $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ (d'après l'hypothèse)

Or $\sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ donc $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$

c) On a montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n, t_1 + \dots + t_n = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$