Thème : Les inégalités

1. Inégalités et valeurs absolues

Rappels : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| =$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{ll} | -x | & \sqrt{x^2} \\ | xy | & \text{si } y \neq 0, \left| \frac{x}{y} \right| \end{array}$$

Attention, $|x + y|$

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}, |x| = a \Leftrightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow$$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |y| - |x| \leq |y - x|$, puis que $||y| - |x|| \leq |y - x|$

(on pourra remarquer que $y = y - x + x$)

2) Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Montrer que $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$.

3) Soit X une variable aléatoire discrète qui admet une espérance et une variance. Montrer que :

$$\mathbf{E}(X)^2 \leq \mathbf{E}(X^2) \text{ et } |\mathbf{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}$$

2. Inégalités de Cauchy-Schwarz

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux familles de n réels. $\forall t \in \mathbb{R}$, on pose $P(t) = \sum_{k=1}^n (t \cdot x_k + y_k)^2$.

1) Montrer que P est un polynôme du second degré, dont on précisera les coefficients.

2) Déterminer le signe de P . Que peut-on dire de Δ ?

3) En déduire que : $\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$

4) En plus :

Montrer qu'il y a égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, y_k = \lambda \cdot x_k$

Remarque :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[0;1]$.

En posant $P(t) = \int_0^1 (f(x) + t \cdot g(x))^2 dx$, on peut montrer de manière analogue :

$$\left| \int_0^1 (f(x)g(x)) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 g(x)^2 dx}$$

3. Convexité et inégalités de Jensen.

Rappel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2, t_1 + t_2 = 1 \Rightarrow f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1.f(x_1) + t_2f(x_2)$$

1) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I .

Montrer que $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

2) On admet (provisoirement) que si f est une fonction convexe sur un intervalle I , alors :

$$\forall n \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n, t_1 + \dots + t_n = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i.f(x_i)$$

a) Montrer que si f est convexe sur I , $\forall n \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$.

b) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I .

Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans I .

Montrer que $f(E(X)) \leq E(f(X))$ (inégalité de Jensen discrète)

3) L'objectif de cette question est de montrer la propriété annoncée dans la question 2 :

a) Montrer que cette propriété est vraie pour $n = 1$.

b) Supposons que cette propriété est vraie à un rang n . Montrer alors qu'elle est vraie au rang $n+1$.

(On pourra remarquer que si $t_{n+1} > 0$, $t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1} = (t_n + t_{n+1}) \left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1} \right)$

c) Conclure.