Thème Matrices de rang 1 - Correction

Partie I

a) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

b) ${}^tA = {}^t(X{}^tX) = {}^t({}^tX){}^tX = X{}^tX = A$, donc A est symétrique.

c) $AX = (X{}^tX).X = X({}^tX.X) = X\alpha = \alpha X$. Donc AX et X sont colinéaires.

d) $A^2 = (X{}^tX)(X{}^tX) = X({}^tXX){}^tX = X\,\alpha{}^tX = \alpha X{}^tX = \alpha A$. $A^2 - \alpha A = 0$. Donc $X^2 - \alpha X$ est un polynôme annulateur de A.

2) a) $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \dots & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{pmatrix}$. $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

b) α est une somme de nombres positifs. Donc $\alpha = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ x_i^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0$

$\Leftrightarrow X = 0$.

Or $X \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$.

3) a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_n$. On a alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2x_1 \\ \dots \\ x_nx_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_2^2 \\ \dots \\ x_nx_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1x_n \\ x_2x_n \\ \dots \\ x_n^2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(x_1X, x_2X, \dots, x_nX)$$

Or l'un des (x_i) au moins est non nul, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X)$. Comme $X \neq 0$, c'est une base de Im(f). D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 1$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$. $f(Y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2y_1 + x_1x_2y_2 + \dots + x_1x_ny_n = 0 \\ x_1x_2y_1 + x_2^2y_2 + \dots + x_2x_ny_n = 0 \\ \dots \\ x_1x_ny_1 + x_2x_ny_2 + \dots + x_n^2y_n = 0 \end{cases}$

$X \neq 0$ donc une des coordonnées de X est non nulle. Supposons que $x_1 \neq 0$.

$f(Y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2y_1 + x_1x_2y_2 + \dots + x_1x_ny_n = 0 \\ 0 = 0 \quad L_2 \leftarrow x_2L_1 - x_1L_2 \\ \dots. \\ 0 = 0 \quad L_n \leftarrow x_nL_1 - x_1L_n \end{cases} \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = 0.$

Si $x_1 = 0$ et qu'un autre coefficient est non nul, on retrouve cette relation.

Donc $\mathrm{Ker}\, f = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = 0\right\}$

Partie II

Si A est de rang 1, ses vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ sont tous colinéaires.

Donc il existe un vecteur $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $C_1 = \lambda_1u, \dots, C_n = \lambda_nu$

En posant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$, on a : $C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1u_1 \\ \dots \\ \lambda_nu_n \end{pmatrix}$, …, $C_n = \begin{pmatrix} \lambda_nu_1 \\ \dots \\ \lambda_nu_n \end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{pmatrix} \lambda_1u_1 & \dots & \lambda_nu_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1u_n & \dots & \lambda_nu_n \end{pmatrix}$.

Posons $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors $A = X.{}^tY$

De plus si $X = 0$ ou $Y = 0$ alors $A = 0$, donc A n'est pas de rang 1. Donc X et Y sont non nuls.