Thème : Projecteurs et symétries - Correction

A) 1) Il est évident que $p^k = p\ \forall\ k \geq 1$ (ou par récurrence)
2) $P^2 = P$ donc $P^2 - P = 0$ donc $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de P.
Les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.
3) a) $p(y) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(p)$.
b) Soit $x \in E$. $x = p(x) + (x - p(x))$
Or $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $(x - p(x)) \in \mathrm{Ker}(p)$ donc tout élément de E est somme d'un élément de Ker(p) et d'un élément de Im(p).
4) a) Soit $x \in E_1(P)$ alors $p(x) = x$ donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.
Inversement, soit $x \in \mathrm{Im}(p)$: il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
Alors $p(x) = p(p(y)) = p^2(y) = p(y) = x$ donc $x \in E_1(P)$. Donc $E_1(P) = \mathrm{Im}(p)$.
b) Les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.
De plus $\dim(E_0) + \dim(E_1) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(E)$ (d'après le théorème du rang).
Donc P est diagonalisable.
Dans une base de vecteurs propres, la matrice de p est une matrice diagonale qui ne contient que des 1 et des 0.
5) a) $q^2 = (id_E - p)^2 = (id_E - p)\circ(id_E - p) = id_E - p - p + p^2 = id_E - 2p + p = id_E - p = q$.
Donc q est un projecteur.
b) $p\circ q = p \circ(id_E - p) = p - p^2 = 0_E$ de même pour $q \circ p$.
c) On a vu que $p \circ q = q \circ p$. Donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^k = (2p + q)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (2p)^i q^{k-i} = q^k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} 2^i pq + 2^k p^k = q + 2^k p.$$

6) $(2p - id_E)^2 = (2p - id_E)(2p - id_E) = 4p^2 - 2p - 2p + id_E = 4p - 4p + id_E = id_E$ donc $2p - id_E$ est une symétrie.

B) 1) $s \circ s = id_E$ donc s est un automorphisme et $s^{-1} = s$
2) $S^2 = I_n$ $S^2 - I_n$ donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de S.
Les seules valeurs propres possibles de s sont -1 et 1.
3) a) $F = \{x \in E / s(x) = x\} = \{x \in E / s(x) - x = 0\} = \mathrm{Ker}(s - id) = E_1(S)$
De même, $G = \{x \in E / s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}(s + id) = E_{-1}(S)$.
b) $\forall\ x \in E,\ x = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2}$

Posons $y = \dfrac{x + s(x)}{2}$ $s(y) = s\left(\dfrac{x + s(x)}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(s(x) + s^2(x)\right) = \dfrac{1}{2}(x + s(x)) = y$ donc $y \in F$.

Posons $z = \dfrac{x - s(x)}{2}$ $s(z) = s\left(\dfrac{x - s(x)}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = \dfrac{1}{2}(s(x) - x) = -z$ donc $z \in G$.

Donc $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$.

c) De manière analogue : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Posons $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ alors $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ g est paire.

Posons $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ alors $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$ donc h est impaire.

Donc $f = g + h$, avec g paire et h impaire.