

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel

Soit p un endomorphisme de $\mathcal{E}$. Si $p^2 = p$, on dit que p est un **projecteur**.

Soit s un endomorphisme $\mathcal{E}$. Si $s^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, on dit que s est une **symétrie**.

Exercice

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$.

Partie A

Soit p un projecteur de $\mathcal{E}$. On note P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

- 1) Pour $k \geq 1$, déterminer p^k .
- 2) Déterminer les seules valeurs propres possibles de P .
- 3) a) Soit $x \in \mathcal{E}$. On pose $y = x - p(x)$. Montrer que $y \in \text{Ker}(p)$.
b) En déduire que tout élément de $\mathcal{E}$ est somme d'un élément de $\text{Im}(p)$ et d'un élément de $\text{Ker}(p)$.
- 4) a) Par une double-inclusion, montrer que $E_1(P) = \text{Im}(p)$
b) Montrer que P est diagonalisable. Quelle est la matrice de p dans une base de vecteurs propres ?
- 5) On pose $q = \text{id}_{\mathcal{E}} - p$.
a) Montrer que q est aussi un projecteur.
b) Déterminer $p \circ q$ et $q \circ p$.
- c) Posons $f = 2p + q$. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de f^k en fonction de k .
- 6) Montrer que $s = 2p - \text{id}_{\mathcal{E}}$ est une symétrie de $\mathcal{E}$.

Partie B

Soit s une symétrie de $\mathcal{E}$. On note S sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

- 1) Montrer que s est bijective et exprimer s^{-1} en fonction de s .
- 2) Déterminer les seules valeurs propres possibles de S .
- 3) Soit $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{E} / s(x) = x\}$ et $\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{E} / s(x) = -x\}$.
a) Ecrire $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ comme des noyaux d'application linéaires et comme des sous-espaces propres.
b) Soit $x \in \mathcal{E}$. En remarquant que $x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$, montrer que x peut s'écrire comme la somme d'un élément de $\mathcal{F}$ et d'un élément de $\mathcal{G}$.
c) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Par analogie, montrer que f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.