Thème : Déterminant et trace

Rappel :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ alors

$AB = (c_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$, avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\ \forall\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$

1. Trace d'une matrice

Soit $n \geq 1$. On définit l'application tr (trace) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n}$, alors $\mathbf{tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_{i,i}}$ (somme des coefficients diagonaux).

1) Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

b) (Application) Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors tr(A) est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité (c'est-à-dire la dimension des sous-espaces propres).

2. Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1) a) Montrer que $\forall\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\forall\ B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b) Montrer que $\forall\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

c) En déduire que $\forall\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\forall\ B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable, exprimer det(A) en fonction des valeurs propres de A.

Question en plus :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exprimer $\det(A - \lambda I_2)$ en fonction de det(A) et tr(A).

A retenir : Si A est diagonalisable : $\begin{cases} \mathbf{tr(A) =} \\ \mathbf{det(A) =} \end{cases}$