Thème : Matrices de rang 1 (d'après HEC 2016)

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), on rappelle que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

Partie I

Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$. On pose : $A = X.{}^tX$ et $\alpha = {}^tX.X$.

1. a) Préciser le nombre de lignes et de colonnes des matrices A et α.
b) Montrer que A est une matrice symétrique.
c) Montrer que les vecteurs AX et X sont colinéaires.
d) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
b) En déduire que $\alpha \neq 0$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$.
a) Déterminer une base de Im f.
b) En déduire la dimension de Ker(f).
c) Déterminer Ker f.

Partie II

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est de rang 1.
Montrer qu'il existe deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulles telle que $A = X.{}^tY$.