C.B. n°1 Correction

Exercice 1

Partie A : Etude de la fonction f

1. Remarque : $\forall\ x \in]0;1[\ \ x > 0$ et $1 - x > 0$ donc ln(x) et ln(1 – x) sont bien définies.

$x \neq 1$ donc $\ln(x) \neq 0$. Donc f(x) est bien définie.

f est dérivable sur]0;1[comme quotient de fonctions dérivables (dont le dénominateur ne s'annule pas)

et $\forall\ x \in]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{1-x}\ln(x) - \ln(1-x) \times \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2}$

2. a. $\forall\ t \in]0;1[\ \ t > 0$ et $t < 1 \Rightarrow \ln(t) < 0$ donc $t.\ln(t) < 0$

b. $\forall\ x \in]0;1[\quad x\ln(x) < 0$ et $1 - x \in]0;1[$ donc $(1 - x)\ln(1 - x) < 0$

Donc $x\ln(x) + (1 - x)\ln(1 - x) > 0$ (somme de deux termes positifs)

Donc $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur]0;1[.

3. a. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 - x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Donc f est prolongeable en 0 en posant f(0) = 0.

b. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x - 0} = \dfrac{\ln(1-x)}{x.\ln(x)}$ (forme indéterminée)

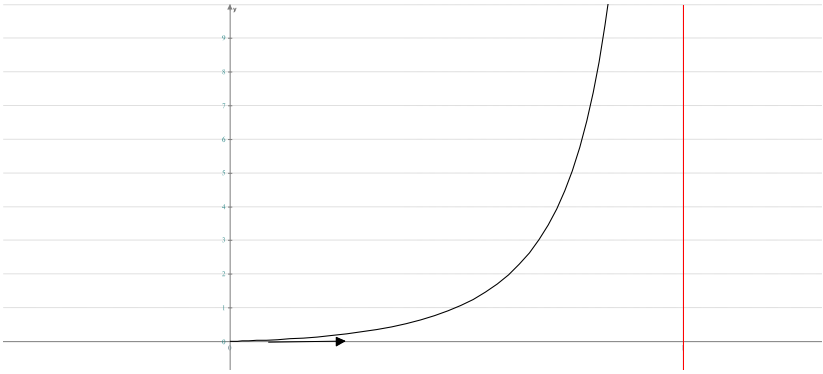
$\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ donc $\ln(1 - x) \sim_0 -x$ donc $\dfrac{\ln(1-x)}{x.\ln(x)} \sim_0 -\dfrac{x}{x.\ln(x)} \sim_0 -\dfrac{1}{\ln(x)}$

$\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. $\lim\limits_{x \to 1} \ln(1 - x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 1,\ x < 1} \ln(x) = 0^-$ donc

$\lim\limits_{x \to 1,\ x < 1} f(x) = +\infty$.

Donc la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation x = 1.



5. On peut remarque que $f(1/2) = \dfrac{\ln(1/2)}{\ln(1/2)} = 1$

Partie B

6. g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (fonction polynomiale) et $\forall\ x \geq 0$, $g_n'(x) = n.x^{n-1} + 1 > 0$.

Donc g_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $g_n(0) = -1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$ et $0 \in [-1; +\infty[$.

Donc l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$.

7. $g_n(1) = 1 \quad g_n(0) = -1 \quad g_n(u_n) = 0$ donc $g_n(0) < g_n(u_n) < g_n(1)$.

Comme g_n est strictement croissante, $0 < u_n < 1$.

8. Pour n = 1 : $g_1(x) = 2x - 1 \quad g_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

De même, $g_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = 5$

Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ $\quad x_2 < 0$ donc ne convient pas. Donc $u_2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

9. a. $\forall\ x \geq 0$, $g_{n+1}(x) - g_n(x) = x^{n+1} + x - 1 - (x^n + x - 1) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$

$\forall\ x \geq 0$, $x^n \geq 0$ donc l'expression est du signe de (x – 1).

Donc $\begin{cases} \forall\, x \geq 1,\ g_{n+1}(x) - g_n(x) \geq 0 \\ \forall\, x \in [0,\ 1],\ g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq 0 \end{cases}$

b. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in [0;1]$, donc $g_{n+1}(u_{n+1}) - g_n(u_{n+1}) \leq 0$

Comme $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a $- g_n(u_{n+1}) \leq 0$ donc $g_n(u_{n+1}) \geq 0$.

c. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $g_n(u_{n+1}) \geq g_n(u_n)$.

Comme g_n est strictement croissante : $u_{n+1} \geq u_n$. Donc (u_n) est croissante.

10. On sait que $g_n(u_n) = 0$ $u_n^{\,n} + u_n - 1 = 0$ $u_n^{\,n} = 1 - u_n$

Comme $1 - u_n > 0$ $\ln(u_n^{\,n}) = \ln(1 - u_n)$ $n.\ln(u_n) = \ln(1 - u_n)$

$u_n \neq 1$ donc $\ln(u_n) \neq 0$ donc $n = \dfrac{\ln(1 - u_n)}{\ln(u_n)}$ $f(u_n) = n$.

11. f est continue et strictement croissante sur $]0;1[$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$, donc f réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]0; +\infty[$, donc admet une application réciproque f^{-1} définie sur $]0; +\infty[$.

$\forall n \geq 1$ $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = 1$ donc par composée $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = 1$.

Ou : (u_n) est une suite croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $L \leq 1$.

$u_n^{\,n} = \exp(n.\ln(u_n))$ si $L < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \ln(L) < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n.\ln(u_n) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{\,n} = 0$.

Comme $u_n^{\,n} = 1 - u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u_n = 1 - L$, on a $0 = 1 - L$ donc $L = 1$ il y a contradiction. Donc $L = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 2

1) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall t > 0$, $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2 - 1}{t^2} = \dfrac{(t - 1)(t + 1)}{t^2}$

$\lim\limits_{t \to 0,\ t>0} \dfrac{1}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to 0,\ t>0} f(t) = +\infty$ $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

t	0		1		$+\infty$
f '(t)		–	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

2) Par récurrence : _ on sait que u_1 existe et $u_1 = 1 \geq 1$

_ supposons qu'à un rang n, u_n existe et $u_n \geq 1$: alors $n^2 u_n \neq 0$ donc $\dfrac{1}{n^2 u_n}$ existe donc u_{n+1} existe.

De plus $u_n > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 0$. Comme $u_n \geq 1$ $u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 1 + 0$ donc $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

Ou pour l'hérédité : $u_n \geq 1$ donc $n.u_n \geq n$

Sur $[1\ ; +\infty[$, f est croissante donc $f(n.u_n) \geq f(n)$ $\dfrac{1}{n} f(n.u_n) \geq \dfrac{1}{n} f(n)$ $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$ $u_{n+1} \geq 1 + \dfrac{1}{n^2} \geq 1$

3)
```
n=int(input('n =')) ;u = 1
for k in range(2,n+1):   #On calcule de u2 à un
   u = u+1/((k-1)**2*u)
print(u)
```

Attention : $\forall\, k \geq 2$, $u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{(k - 1)^2 u_{k-1}}$

Ou :
```
for k in range(1,n):   #On calcule uk+1 pour k de 1 à n – 1
   u = u+1/(k**2*u)
```

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}$

$u_n \geq 0$ et $n^2 \geq 0$ donc $v_n \geq 0$ $\quad u_n \geq 1$ donc $n^2 u_n \geq n^2$ $\quad \dfrac{1}{n^2 u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\quad v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

b) $\forall\, n \geq 1$, $v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et les séries sont à termes positifs, donc $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n$ est aussi convergente.

c) $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1 = u_{n+1} - 1$ (somme télescopique)

Donc $\forall n \geq 1$, $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$. La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n$ converge, donc par définition la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ converge. Donc (u_n) est une suite convergente.

5) a) $\forall\, k \geq 2$, $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)}$ $\quad k - 1 \leq k$ donc $(0<)\ (k-1)k \leq k^2$ $(\times k > 0)$

$\dfrac{1}{(k-1)k} \geq \dfrac{1}{k^2}$ (fonction inverse décroissante sur $]0;+\infty[$ $\quad \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

b) Si $2 \leq p < n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2 u_k}$

$\forall k \in \{p, \ldots, n-1\}$ $\dfrac{1}{k^2 u_k} \geq 0$ et $\dfrac{1}{k^2 u_k} \leq \dfrac{1}{k^2}$ donc $0 \leq \displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=p}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

Or par somme télescopique, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$.

De plus $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_p - u_n$. Donc $0 \leq u_p - u_n \leq \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{n-1}$.

c) Donc avec $p = 2$: pour $n \geq 3$ $\quad 0 \leq u_n - u_2 \leq 1 - \dfrac{1}{n-1} \leq 1$. Donc $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.

Or $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1^2 u_1} = 2$ donc $u_n \in [2;3]$.

d) $\forall n > p$, $0 \leq u_n - u_p \leq \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{n-1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{p-1}$. Donc par passage aux limites : $0 \leq L - u_p \leq \dfrac{1}{p-1}$.

e) Si $\dfrac{1}{p-1} \leq 10^{-4}$, on est sûr que $L - u_p \leq 10^{-4}$, donc que u_p est une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

$\dfrac{1}{p-1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow p - 1 \geq 10^4 \Leftrightarrow p \geq 10\,001$.

```
u=1
for k in range(2,10002):
   u = u+1/((k-1)**2*u)
print(u)
```

Ou :

```
u=2;p=2;
while 1/(p-1)>10**-4:
   p=p+1
   u = u+1/((p-1)**2*u)
print(u)
```

Attention, il est nécessaire de commencer avec $p = 2$ (et $u = u_2 = 2$), car $\dfrac{1}{p-1}$ n'est pas défini pour $p = 1$.

Exercice 3

Partie I – Préliminaire

1. h est continue sur]0; + ∞[comme produit de fonctions continues.

En 0 : $\lim\limits_{x \to 0} x.\ln(x) = 0$ (par croissances comparées) et h(0) = 0, donc h est continue en 0.

Donc h est continue sur [0; + ∞[.

2. Si $x \in]0;1[$ $\quad 0 < x < 1,\ 0 < 1 - x < 1$ donc $g(x) = - x.\ln(x) - (1 - x)\ln(1 - x)$

g(0) = - h(0) – h(1) = 0 $\quad$ g(1) = - h(1) – h(0) = 0

g est continue en 0 et en 1 comme somme et composée de foncions continues.

g est dérivable sur]0;1[comme somme et produits de fonctions dérivables et $\forall\ x \in]0;1[$,

$g'(x) = - \ln(x) - x\dfrac{1}{x} - (-1)\ln(1 - x) - (1 - x)\dfrac{-1}{1 - x} = - \ln(x) - 1 + \ln(1 - x) + 1 = \ln(1 - x) - \ln(x).$

$\ln(1 - x) - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 - x) \geq \ln(x) \Leftrightarrow 1 - x \geq x$ (car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}.$ $\qquad g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(2).$

x	0		1/2		1
g '(x)	?	+	0	–	?
g(x)	0	↗	ln(2)	↘	0

Partie II – Des variables aléatoires discrètes

3. $U \longrightarrow \mathcal{U}([[1;n]])$ donc $U(\Omega) = [[1;n]]$ et $\forall\ k \in [[1;n]]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}.$

Donc $H(U) = -\sum\limits_{k=1}^{n} h\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\,n\,\dfrac{1}{n}(-\ln(n)) = \ln(n)$

4. $X \longrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc $\begin{cases} P(X = 0) = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{cases}$ $\qquad h(X) = - h(p) – h(1 – p) = g(p)$ (avec $p \in]0;1[$)

Donc d'après la partie 1, $h(X) \leq \ln(2)$ et $h(X) = \ln(2)$ pour $p = \dfrac{1}{2}.$

Exercice 4

Partie I : 1. La probabilité d'obtenir une boule noire est q. Les tirages sont indépendants.
T est le nombre d'essais pour obtenir une boule noire. Donc $T \longrightarrow \mathcal{G}(q)$.

$\forall\ k \geq 1$, $P(T = k) = p^{k-1} \times q$ $\qquad E(T) = \dfrac{1}{q}.$ $V(T) = \dfrac{1 - q}{q^2} = \dfrac{p}{q^2}.$

2. On a U = T – 1 donc U admet une espérance et une variance et

$E(U) = E(T) - 1 = \dfrac{1}{q} - 1 = \dfrac{p}{q}$ $\qquad\qquad V(U) = 1^2 V(T) = \dfrac{p}{q^2}$

Partie II

1. $\forall\ k \geq 2$, $(X = k) = (B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k)$
Les tirages sont indépendants) donc $P(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$

2. $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} p^{k-1}q + q^{k-1}p = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} p^{j+1}q + q^{j+1}p$ (en posant j = k – 2)

$= pq\sum\limits_{j=0}^{+\infty} p^j + pq\sum\limits_{j=0}^{+\infty} q^j = pq \times \dfrac{1}{1 - p} + pq \times \dfrac{1}{1 - q} = \dfrac{pq}{q} + \dfrac{pq}{p} = p + q = 1$

3. $\sum_{k \geq 2} kP(X= k) = q \sum_{k \geq 2} kp^{k-1} + p \sum_{k \geq 2} kq^{k-1}$

$0 < p < 1$ et $0 < q < 1$ donc les séries convergent absolument. Donc X admet une espérance et

$E(X) = q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) = q\left(\frac{1}{q^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{p^2} - 1\right) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - p - q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$

4. $\sum_{k \geq 2} k^2P(X = k) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)P(X= k) + \sum_{k \geq 2} kP(X = k)$

La deuxième série converge et sa somme vaut $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$

$\sum_{k \geq 2} k(k-1)P(X= k) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)(q\,p^{k-1} + p\,q^{k-1}) = pq \sum_{k \geq 2} k(k-1)(p^{k-2} + q^{k-2})$

$= pq\left(\sum_{k \geq 2} k(k-1)p^{k-2} + \sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}\right)$

$-1 < p < 1$ et $-1 < q < 1$ donc les séries convergent absolument.

Donc X^2 admet une espérance et

$E(X^2) = pq\left(\frac{2}{(1-p)^3} + \frac{2}{(1-q)^3}\right) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = pq\left(\frac{2}{q^3} + \frac{2}{p^3}\right) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{2p}{q^2} + \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$

$= \frac{2(1-q)}{q^2} + \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{2}{p^2} + \frac{2}{q^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{p^2} + \frac{2}{q^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1 - 1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)^2$

$= \frac{2}{p^2} + \frac{2}{q^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1 - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{q} + \frac{2}{pq}\right)$

$= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2}{pq}$

Exercice 5

1. Si $n \leq N$: on peut avoir de 1 à n cases non vides : $T_n(\Omega) = [[1 ;n]]$

Si $n > N$: on peut avoir de 1 à N cases non vides : $T_n(\Omega) = [[1 ;N]]$

Donc $T_n(\Omega) = [[1 ;\min(n, N)]]$

2. $T_1(\Omega) = \{1\}$ $P(T_1 = 1) = 1$ (loi certaine)

$T_2(\Omega) = \{1,2\}$ $\text{card}(\Omega) = N^2$ (N possibilités pour chaque boule)

$P(T_2 = 1) = P(\text{« on place les boules dans la même case »}) = \frac{N \times 1}{N \times N} = \frac{1}{N}$

(N possibilités pour la première boule, 1 possibilité pour la deuxième)

$P(T_2 = 2) = P(\text{« on place les deux boules dans deux cases différentes »}) = \frac{N(N-1)}{N^2} = \frac{N-1}{N}.$

(N possibilités pour la première boule, N – 1 possibilités pour la deuxième).

i	1	2
$P(T_2 = i)$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N}$

c) De la même manière

$(T_n = 1) =$ « on obtient n fois la même case » $P(T_n = 1) = \frac{N \times 1 \times \ldots \times 1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}$

$(T_n = 2)$ = « on obtient exactement deux cases différentes »

Choix des deux cases : $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ possibilités.

Choix de la case pour chaque lancer : 2^n possibilités

Mais il faut enlever les deux cas où on a toujours la même case : Donc $2^n - 2$ possibilités.

Donc $P(T_n = 2) = \frac{\frac{N(N-1)}{2}(2^n - 2)}{N^n} = \frac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}$.

Si $n > N$: $(T_n = n)$ est impossible donc $P(T_n = n) = 0$

Si $n \leq N$: $(T_n = n)$ = « chaque boule est placée dans une case différente »

$P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}$

(d) $(T_{n+1} = k)$ = « soit au bout de n lancers, on a les boules dans k cases et au $(n+1)^e$ lancer, on obtient une case déjà utilisée, soit au bout de n lancers, on a les boules dans $(k-1)$ cases et au $(n+1)^e$ lancer, on obtient une case encore vide (il y a en $N - (k-1) = N - k + 1$).
Si on note V_{n+1} : « on place la $(n+1)^e$ boule dans une case vide :

$(T_{n+1} = k) = \left((T_n = k) \cap \overline{V_{n+1}}\right) \cup \left((T_n = k-1) \cap V_{n+1}\right)$

Donc $P([T_{n+1} = k]) = P([T_n = k])\frac{k}{N} + P([T_n = k-1])\frac{N-k+1}{N}$.