Concours blanc n°1
Epreuve de mathématiques
Mardi 07 Novembre 2023 – 4 heures

Exercice 1 – EML 2020

On considère la fonction f définie sur]0; 1[par :

$$\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur]0; 1[et que l'on a :

$$\forall x \in]0; 1[,\ f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2}(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x))$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0; 1[,\ t.\ln(t) < 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur]0; 1[.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser f(0).

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser f '(0).

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les asymptotes éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}+$ de la fonction $g_n : x \longmapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}+$ que l'on note u_n.

7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle]0; 1[.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, étudier le signe de $g_{n+1}(x) - g_n(x)$ en fonction des valeurs de x.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(u_{n+1}) \geq 0$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

10) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

11) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 2 – EML 2019

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall t \in]0;+\infty[$, $f(t) = t + \frac{1}{t}$.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

1) Etudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2) Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.
3) Recopier et compléter les lignes du programme Python suivant afin que, après avoir demandé un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
n=int(input('n =')) ;
u = 1
for k in …
   u = …
print(u)
```

4) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.
b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.
c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel L, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
5) a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :
$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$.
c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
Montrer alors que L appartient à l'intervalle [2; 3].
d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq L - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$

e) En déduire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Exercice 3 – EML 2023 - L'entropie en probabilité

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[[1, n]]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n : $[[1, n]] = \{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \}$.

La partie II utilise des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x.\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour tout x dans $[0, 1]$ on pose $g(x) = - h(x) – h(1 – x)$.

Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω ,A, P), l'entropie de X est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, ... , x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où, pour tout i dans $[[1, n]]$, $p_i = P(X = x_i)$.

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[[1, n]]$.

Déterminer H(U).

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Démontrer que $H(X) \leq \ln 2$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

On pourra utiliser la question 2.

Exercice 4 – EML 2009

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q. Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer E(U) et V(U).

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Pour tout entier naturel non nul i, on note :

B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1. Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q.p^{k-1} + p.q^{k-1}$.
2. Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.
4. Montrer que X admet une variance et déterminer V(X).

Exercice 5 – Ecricome 2008

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude d'un jeu présent dans une fête foraine. Pour ce jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules.

Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

a) Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

b) Donner les lois de T_1 et T_2.

c) Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1]$, $[T_n = 2]$, $[T_n = n]$. (pour la dernière probabilité, on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leq N$).

d) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, exprimer $P(T_{n+1} = k)$ en fonction de $P(T_n = k)$ et $P(T_n = k – 1)$.