Concours blanc n°2 - Correction

Exercice 1

Partie I – Etude de la fonction f

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\ln(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $f(x) \sim_{+\infty} x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. Sur $]0;1[$ f est continue et strictement décroissante. De plus $2 \in]1; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution a sur $]0;1[$. De même, l'équation admet une unique solution b sur $[1; +\infty[$.

3. $f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1{,}3$ $f(b) = 2$ $f(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 3{,}6$

$f(2) \le f(b) \le f(4)$ et f est croissante sur $[1; +\infty[$, donc $2 \le b \le 4$.

Partie II – Etude d'une équation différentielle

4. $\forall t > 0$, $e^{-f(t)} = e^{-(t - \ln(t))} = e^{-t}e^{\ln(t)} = t.e^{-t}$

Si $y(t) = (at + b)e^{-t}$ y est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall t > 0$, $y'(t) = a.e^{-t} + (at + b)(-e^{-t}) = (-at + a - b)e^{-t}$

$y'(t) - 2y(t) = (-at + a - b)e^{-t} - 2(at + b)e^{-t} = (-3at + a - 3b)e^{-t}$

$y'(t) - 2y(t) = t.e^{-t} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$ par identification $\Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{3}$; $b = \dfrac{a}{3} = -\dfrac{1}{9}$.

Une solution particulière est donc : $y(t) = \left(-\dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}\right)e^{-t}$

5. L'équation homogène est : $y' - 2y = 0$. Elle a pour solutions : $y(t) = \lambda e^{2t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(t) = \left(-\dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}\right)e^{-t} + \lambda e^{2t}$.

6. $\left(-\dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}\right)e^{-t} = -\dfrac{1}{3}te^{-t} - \dfrac{1}{9}e^{-t}$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}\right)e^{-t} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{2t} = +\infty$.

Donc la trajectoire est convergente si et seulement si $\lambda = 0$.

7. $y(1) = \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}\right)e^{-1} + \lambda e^2 = -\dfrac{4}{9}e^{-1} + \lambda e^2$ $y(1) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^2 = \dfrac{4}{9}e^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{4}{9}e^{-3}$ Donc $y(t) = \left(-\dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}\right)e^{-t} + \dfrac{4}{9}e^{2t-3}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

8. f ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ donc $g = 1/f$ existe.

f est continue sur $]0; +\infty[$, donc $g = 1/f$ aussi, donc l'intégrale est bien définie.

De plus, g étant continue elle admet une primitive G. On a alors $\Phi(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$.

Donc Φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables, et :

$\forall x > 0$, $\Phi'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{2}{2x - \ln(2x)} - \dfrac{1}{x - \ln(x)} = \dfrac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} =$

$\dfrac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{f(x)f(2x)}$

9. f est positive sur $]0; +\infty[$ donc Φ' est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$. $\ln(2) - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(2) \Leftrightarrow x < 2$.

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$		↗		↘	

10. Soit $x > 0$: $2x > x$ les bornes sont dans le bon sens.

$\forall t \in [x, 2x]$ $f(t) > 0$ donc $\dfrac{1}{f(t)} > 0$ $\quad f(t) \geq 1$ donc $\dfrac{1}{f(t)} \leq 1$

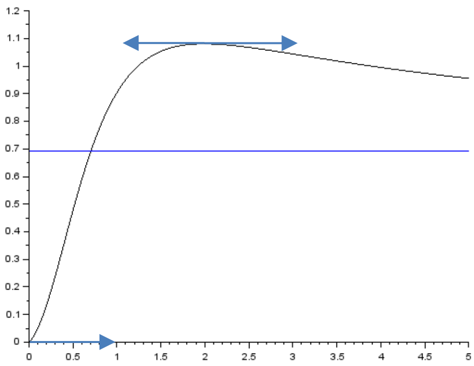
D'après l'inégalité de la moyenne, $0 \times (2x - x) \leq \Phi(x) \leq 1 \times (2x - x)$ $\quad 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

11. a. $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ donc par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$. Donc Φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\Phi(0) = 0$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\ln(2) - \ln(x) \sim_0 -\ln(x)$ $\quad x - \ln(x) \sim_0 -\ln(x)$

$2x - \ln(2x) \sim_0 -\ln(2x)$

donc $\Phi'(x) \sim_0 -\dfrac{1}{\ln(2x)}$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.



12.

Partie IV – Etude d'une fonction à deux variables

13. a. $\forall (x, y) \in U$, $\partial_1 H(x, y) = x - y - 2$ $\quad \partial_2 H(x, y) = -x + e^y$

b. Points critiques : $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + e^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \ln(x) - 2 = 0 \\ y = \ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ y = \ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \ln(a) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = b \\ y = \ln(b) \end{cases}$

H a deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$.

14. a. $\forall (x, y) \in U$, $\partial^2_{1,1} H(x, y) = 1$ $\quad \partial^2_{2,1} H(x, y) = -1$ $\quad \partial^2_{1,2} H(x, y) = -1$ $\quad \partial^2_{2,2} H(x, y) = e^y$.

Donc $M_a = \nabla^2 H(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $M_a - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix}$

λ valeur propre de $M_a \Leftrightarrow M_a - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow (1 - \lambda)(a - \lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (-a - 1)\lambda + a - 1 = 0$.

D'après les formules sur somme et produit des racines d'un polynôme du second degré :

$\lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{(-a-1)}{1} = a + 1$ $\quad \lambda_1 \lambda_2 = \dfrac{a-1}{1} = a - 1$

c. $a < 1$ donc $a - 1 < 0$ $\quad \lambda_1\lambda_2 < 0$ $\quad$ les valeurs propres sont de signes opposés : c'est un point-col. H ne présente pas d'extremum local en $(a, \ln(a))$.

15. Les calculs sont identiques en remplaçant a par b.

Mais cette fois-ci $\lambda_1 \lambda_2 = b - 1 > 0$ donc les deux valeurs propres sont de même signe.

Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = b + 1 > 0$, elles sont toutes les deux positives. Il s'agit donc d'un minimum local.

Exercice 2

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 - 4A = -4I$ $\quad A^2 - 4A + 4I = 0$ donc le polynôme $X^2 - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de A.

2. (a) $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ donc la seule racine est 2. Donc la seule valeur propre possible de A est 2.

De plus $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ($C_1 = C_3$), donc 2 est bien valeur propre de A.

Donc A a une seule valeur propre : 2

(b) Si A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$.

Donc $A = P(2I)P^{-1} = 2PIP^{-1} = 2I$. $\quad$ Or $A \neq 2I$, donc A n'est pas diagonalisable.

0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = y - x$.

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre.

Donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_2(A)$.

4. (a) $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ donc la famille est libre. De plus, $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) u_1 et u_2 sont des vecteurs propres donc $f(u_1) = 2u_1$ $f(u_2) = 2u_2$

$f(u_3) = Au_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $f(u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 3 \\ b + c = 4 \\ -a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - c \\ b = 4 - c \\ c + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

Donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc T est bien triangulaire, avec des coefficients 2 sur la diagonale.

Remarque : Si vous avez effectué un autre choix pour u_1 et u_2, les coordonnées de $f(u_3)$ dans la base (u_1, u_2, u_3) peuvent être légèrement différentes.

(c) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2I et N commutent (car 2I commute avec toutes les matrices), donc d'après la formule du binôme de Newton, $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = (2I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2I)^{n-k}N^k$

Si $n \geq 1$, $T^n = \binom{n}{0}(2I)^nN^0 + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}N^1 = 2^nI + n2^{n-1}N$

Pour $n = 0$, la relation reste vraie, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = 2^nI + n2^{n-1}N = 2^nI + n2^{n-1}(T - 2I) = n2^{n-1}T + 2^n(1 - n)I$

5. (a) Soit B' la base (u_1, u_2, u_3). Alors $A = M_B(f)$ et $T = M_{B'}(f)$.

Soit $P = P_{B,B'}$. Alors d'après la formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PTP^{-1})^n = PTP^{-1}PTP^{-1}\dots PTP^{-1} = PT^nP^{-1} = P(n2^{n-1}T + 2^n(1 - n)I)P^{-1}$

$= n2^{n-1}PTP^{-1} - (n - 1)2^nPIP^{-1} = n2^{n-1}A - (n - 1)2^nI$.

Ou : $T^n = n2^{n-1}T + 2^n(1 - n)I$

Or T représente f dans la base $\mathcal{B}'$ donc $f^n = n2^{n-1}f + 2^n(1 - n)id$

Comme A représente f dans la base $\mathcal{B}$: $A^n = n2^{n-1}A - (n - 1)2^nI$.

(b) $A^2 - 4A = -4I$ donc $A(A - 4I) = -4I$ $A\left(-\frac{1}{4}A + I\right) = I$ donc $A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I$.

(c) Pour $n = -1$: $(-1)2^{-1-1}A - (-1 - 1)2^{-1}I = -\frac{1}{4}A + I = A^{-1}$ donc la formule est vraie pour $n = -1$.

Exercice 3

1) On voit que g est positive sur]- ∞;1[et]1; + ∞[($2/x^3 > 0$ si $x \geq 1$), continue sur]- ∞;1[(fonction nulle) et sur]1; + ∞[(inverse d'une fonction continue), donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.

g est à support sur [1; + ∞[.

$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}dx$ converge car 3 > 1.

On sait que la dérivée de $u(x) = -\frac{1}{x^2}$ est $u'(x) = \frac{2}{x^3}$ (question 1) (Ou $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \longrightarrow \frac{2x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x^2}$)

Soit $T \geq 1$. $\int_1^T \frac{2}{x^3}dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^T = -\frac{1}{T^2} + 1$ $\quad \lim\limits_{T \to +\infty} -\frac{1}{T^2} + 1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

Donc g est une densité d'une variable aléatoire X.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$

_ si $x < 1$, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

_ si $x \geq 1$, $G(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x g(t)dt = -\frac{1}{x^2} + 1$ donc $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_2(x) = P(M_2 \leq x) = P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x))$

$= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x)$ (par indépendance)

$= G(x)^2$ (même loi)

Donc $G_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_2(x) = P(Y_2 \leq x) = P\left(\frac{M_2}{\sqrt{2}} \leq x\right) = P(M_2 \leq x\sqrt{2}) = G_2(x\sqrt{2})$

$x\sqrt{2} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc :

_ si $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x\sqrt{2} \geq 1$ $\quad F_2(x) = G_2(x\sqrt{2}) = \left(1 - \frac{1}{(x\sqrt{2})^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)^2$

_ si $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x\sqrt{2} < 1$ $\quad F_2(x) = G_2(x\sqrt{2}) = 0$ $\quad$ donc $F_2(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)^2 \text{ si } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \text{ si } x < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

c) On voit que F_2 est continue et de classe C^1 sur]- ∞ ;$1/\sqrt{2}$[et sur]$1/\sqrt{2}$;+ ∞[

$\lim\limits_{x \to 1/\sqrt{2}} 0 = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 1/\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}}\right)^2 = 0$ donc F_2 est continue en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

F_2 est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $1/\sqrt{2}$. Donc Y_2 est une variable à densité.

$-\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2}x^{-2} \longrightarrow -\frac{1}{2}(-2)x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$F_2'(x) = \begin{cases} 2\frac{1}{x^3}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \text{ si } x > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \text{ si } x < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ donc une densité de Y_2 est $f_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^5} \text{ si } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \text{ si } x < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

3) a) $0 \leq U < 1$ donc $-1 < -U \leq 0$ $\quad 0 < 1 - U \leq 1$ $\quad 0 < \sqrt{1 - U} \leq 1$

La fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \geq \dfrac{1}{1}$.

Donc $V(\Omega) = [1\ ;+\infty[$.

b) Donc $\forall\ x < 1$, $F_V(x) = 0$

$\forall\ x \geq 1$, $F_V(x) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \geq x\right) = P\left(\sqrt{1-U} \geq \dfrac{1}{x}\right) = P\left(1 - U \geq \dfrac{1}{x^2}\right)$ (tout est positif)

$= P\left(U \leq 1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = F_U\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

Or $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

$-\dfrac{1}{x^2} \leq 0$ donc $1 - \dfrac{1}{x^2} \leq 1$ et $x \geq 1$ donc $x^2 \geq 1$ $\dfrac{1}{x^2} \leq 1$ $-\dfrac{1}{x^2} \geq -1$ $1 - \dfrac{1}{x^2} \geq 0$.

$0 \leq 1 - \dfrac{1}{x^2} \leq 1$ donc $F_V(x) = F_U\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Donc $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases} = G(x)$.

Donc V suit la même loi que X.

b)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
u=rd.rand()
v1=1/np.sqrt(1-u)
u=rd.rand()
v2=1/np.sqrt(1-u)
y2=max(v1,v2)/np.sqrt(2)
```

Exercice 4

Partie 1

1) a) X_1 est le rang du premier pile par A. Les lancers sont indépendants. La probabilité de faire pile à chaque lancer est p. Donc $X_1 \longrightarrow \mathcal{G}(p)$. De même pour Y_1.

Soit C_A l'événement "A ne fait jamais de pile". Alors :

$P(C_A) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1}p = 1 - p \sum\limits_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j$ (avec $j = i - 1$)

$= 1 - \dfrac{p}{1-(1-p)} = 1 - 1 = 0$.

De même pour B. Soit l'événement C = "la manche dure éternellement" $= C_A \cap C_B$.

Par indépendance, $P(C) = P(A) \times P(B) = 0 \times 0 = 0$.

Il est quasi impossible que la première manche dure éternellement.

b) Il est évident que $E_1 = (X_1 = Y_1)$

c) Donc $E_1 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left((X_1 = i) \cap (Y_1 = i)\right)$

$P(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (Y_1 = i)) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) \times P(Y_1 = i)$ par indépendance.

$= \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{i-1}p\, q^{i-1}p = p^2 \sum\limits_{j=0}^{+\infty} q^j q^j$ (avec $j = i - 1$) $= p^2 \sum\limits_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{p}{1+q}$.

d) A chaque lancer A et B ont la même probabilité de gagner, donc A et B ont la même probabilité de gagner chaque manche. Donc $P(H_1) = P(G_1)$.
Or E_1, G_1 et H_1 forment un système complet d'événements, donc,

$P(E_1) + P(G_1) + P(H_1) = 1 \qquad 2P(G_1) = 1 - P(E_1) = 1 - \dfrac{p}{1+q} = \dfrac{1+q-p}{1+q} = \dfrac{2q}{1+q} \qquad P(G_1) = \dfrac{q}{1+q}$

2) a) A gagne à la $n^{\text{ème}}$ partie signifie qu'il y a égalité pendant les $(n-1)$ premières manches, puis que A obtient pile en premier lors de la $n^{\text{ème}}$ manche. Donc :

$$G_n = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n)$$

b) Les manches sont toutes identiques et ne dépendent pas des précédentes, donc

$P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = P(E_1) = \dfrac{p}{1+q}$

D'après la formule des probabilités composées,

$P(G_n) = P(E_1) \times P_{E_2}(E_1) \times \dots \times P_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times P_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(X_n > Y_n) = P(E_1)^{n-1} P(X_1 < Y_1)$

$= \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \dfrac{q}{1+q}$

c) $P(G_1) = \dfrac{q}{1+q} \qquad \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{1-1} \dfrac{q}{1+q} = \dfrac{q}{1+q}$ donc l'égalité est vraie aussi pour $n = 1$.

d) $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$. Les événements étant incompatibles,

$P(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \dfrac{q}{1+q} = \dfrac{q}{1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{j} = \dfrac{q}{1+q} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{p}{1+q}} = \dfrac{q}{1+q} \times \dfrac{1}{\dfrac{1+q-p}{1+q}}$

$= \dfrac{q}{1+q} \times \dfrac{1+q}{2q} = \dfrac{1}{2}$.

e) A et B ont des rôles symétriques, donc $P(H) = P(G) = \dfrac{1}{2}$. Comme E, G et H forment un système complet d'événements, on a : $P(E) = 1 - P(G) - P(H) = 0$.

Partie II

```
…
while X==Y:
   X = rd.geometric(p)
   Y=rd.geometric(p)
   c=c+1
if X<Y:
   print('A a gagné')
else:
   print('B a gagné')
print(c)
```