

Exercice

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

b) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles sont les racines de $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, c'est-à-dire 1 et -1.

$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C_2 = -C_1$ donc la matrice n'est pas inversible donc 1 est valeur propre.

$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C_2 = C_1$ donc de même -1 est valeur propre.

Donc $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A a deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable. (ou : A est symétrique donc diagonalisable)

2) a) Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On voit que $P^{-1}BP = D$, c'est-à-dire $B = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

Donc B est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 1. (ou : B est semblable à une matrice diagonale...)

b) On sait que P contient en colonnes une base de vecteurs propres, constituée des bases des sous-espaces propres correspondants.

Donc $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. (ou par calcul direct)

3) a) Une matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ a $n \times n$ coefficients. Pour chaque coefficient, il y a deux possibilités : 0 ou 1. En tout, il y a donc 2^{n^2} possibilités.

b) Pour la première colonne : choix du coefficient qui vaut 1 : n choix

Pour la deuxième colonne : choix du coefficient qui vaut 1 : $n - 1$ choix

....

Pour la dernière colonne : choix du coefficient qui vaut 1 : 1 choix

En tout $n(n - 1) \dots 2 \times 1 = n!$ possibilités.

4. a) Soit $y \in \text{Im}(u - \text{id})$. Alors il existe $x \in E$ tel que $(u - \text{id})x = y$ $u(x) - x = y$.

$(u + \text{id})(y) = u(y) + y = u(u(x) - x) + u(x) - x = u^2(x) - u(x) + u(x) - x = u^2(x) - x = (u^2 - \text{id})(x) = 0$.

Donc $y \in \text{Ker}(u + \text{id})$

Donc $\text{Im}(u - \text{id}) \subset F$.

b) donc $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) \leq \dim(F)$ $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) \leq p$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u - \text{id})) + \dim(\text{Im}(u - \text{id})) = \dim(E)$

$\dim(\text{Im}(u - \text{id})) = n - q$

Donc $n - q \leq p$ $p + q \geq n$

c) Notons $\mathcal{B}$ la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$.

Soit $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ des réels tels que $a_1 f_1 + \dots + a_p f_p + b_1 g_1 + \dots + b_q g_q = 0$ (1)

$\forall i \in \{1, \dots, p\}$, f_i appartient à $F = \text{Ker}(u + \text{id})$ donc $(u + \text{id})(f_i) = 0$ $u(f_i) + f_i = 0$ $u(f_i) = -f_i$

$\forall j \in \{1, \dots, q\}$, g_j appartient à $G = \text{Ker}(u - \text{id})$ donc $(u - \text{id})(g_j) = 0$ $u(g_j) - g_j = 0$ $u(g_j) = g_j$.

Donc d'après (1) : $u(a_1 f_1 + \dots + a_p f_p + b_1 g_1 + \dots + b_q g_q) = u(0)$

$$a_1 u(f_1) + \dots + a_p u(f_p) + b_1 u(g_1) + \dots + b_q u(g_q) = 0$$

$$-a_1 f_1 \dots -a_p f_p + b_1 g_1 + \dots + b_q g_q = 0 \quad (2)$$

En faisant (1) + (2), on obtient : $2b_1 g_1 + \dots + 2b_q g_q = 0$

Or la famille $(g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre, donc $2b_1 = 0, \dots, 2b_q = 0$ donc $b_1 = b_2 = \dots = b_q = 0$.

En remplaçant dans (1) : $a_1 f_1 + \dots + a_p f_p = 0$.

De même, comme la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, $a_1 = \dots = a_p = 0$.

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

De plus cette famille a $p + q$ éléments, avec $p + q \geq \dim(E)$.

Or, dans un espace de dimension n , une famille libre a au plus n éléments. Donc $p + q = \dim(E)$

De plus, dans un espace de dimension n , une famille libre à n éléments est une base. Donc $\mathcal{B}$ est une base.

$$d) u(g_1 - f_1) = u(g_1) - u(f_1) = g_1 + f_1$$

$$u(g_1 + f_1) = u(g_1) + u(f_1) = g_1 - f_1.$$

e) (on rappelle que $p < q$)

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, notons $h_i = g_i + f_i$ et $k_i = g_i - f_i$.

Notons $\mathcal{C}$ la famille $(h_1, \dots, h_p, k_1, \dots, k_p, g_{p+1}, \dots, g_q)$. Montrons que $\mathcal{C}$ est une base de E :

Si $a_1 h_1 + \dots + a_p h_p + b_1 k_1 + \dots + b_p k_p + c_{p+1} g_{p+1} + \dots + c_q g_q = 0$

$$a_1(g_1 + f_1) + \dots + a_p(g_p + f_p) + b_1(g_1 - f_1) + \dots + b_p(g_p - f_p) + c_{p+1} g_{p+1} + \dots + c_q g_q = 0$$

$$(a_1 - b_1)f_1 + \dots + (a_p - b_p)f_p + (a_1 + b_1)g_1 + \dots + (a_p + b_p)g_p + c_{p+1} g_{p+1} + \dots + c_q g_q = 0$$

Comme la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est libre, on a :

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ \dots \\ a_p - b_p = 0 \\ a_1 + b_1 = 0 \\ \dots \\ a_p + b_p = 0 \\ c_{p+1} = 0 \\ \dots \\ c_q = 0 \end{cases} \quad \text{De } \begin{cases} a_1 + b_1 = 0 \\ a_1 - b_1 = 0 \end{cases} \text{ on obtient } \begin{cases} 2b_1 = 0 \\ a_1 = b_1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

De même $a_2 = b_2 = 0, \dots, a_p = b_p = 0$.

Donc la famille $\mathcal{C}$ est une famille libre.

De plus $\text{card}(\mathcal{C}) = p + p + (q - p) = p + q = n = \dim(E)$, donc $\mathcal{C}$ est une base de E .

Or $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $u(k_i) = f_i$ et $u(f_i) = k_i$ et $\forall i \in \{p+1, \dots, q\}$, $u(g_i) = g_i$.

Donc $M_{\mathcal{C}}(u) =$

$u(f_1)$	$\dots$	$u(f_p)$	$u(k_1)$	$\dots$	$u(k_p)$	$u(g_{p+1})$	$\dots$	$u(g_q)$
0	$\dots$	0	1	0	0	0	$\dots$	0
$\dots$		$\dots$	0	1	0	$\dots$		$\dots$
0	$\dots$	0	0	0	1	0	$\dots$	0
1	0	0	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0
0	1	0	$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$
0	0	1	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0
0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	1	0	0
$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$	0	1	0
0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	0	0	1

Donc $M_{\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

Problème

Partie I

1. a) $\forall t \in \mathbb{R}, M_X(t) = E(e^{tX})$. D'après le théorème de transfert, $M_X(t) = \sum_{k=-n}^n e^{tk} P(X = k)$.

M_X est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^1 .

(b) La dérivée p -ème de $u(t) = e^{tk}$ est $u^{(p)}(t) = k^p e^{tk}$ donc $M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^p e^{tk} P(X = k) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

En particulier, $M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^n k^p P(X = k)$.

Or d'après le théorème de transfert, $E(X^p) = \sum_{k=-n}^n k^p P(X = k)$ donc $M_X^{(p)}(0) = E(X^p)$.

(c) i. $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = \sum_{k=0}^{2n} P(X = k - n)(e^t)^k = \sum_{k=0}^{2n} P(X = k - n)e^{tk}$.

Posons $k' = k - n$ $G_X(e^t) = \sum_{k'=-n}^n P(X = k')e^{t(k' + n)} = \sum_{k'=-n}^n P(X = k')e^{tk'}e^{tn} = e^{tn} \sum_{k'=-n}^n P(X = k')e^{tk'} = e^{nt} M_X(t)$

ii. $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t) = e^{nt} M_Y(t) = G_Y(e^t)$ (la formule précédente est aussi vraie pour Y).

iii. Posons $P = G_X - G_Y$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, P(e^t) = 0$

La fonction $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$ donc $\forall y \in]0; +\infty[, P(y) = 0$.

Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines.

Comme P a une infinité de racines, P est nul.

Donc $\forall k \in \{0, \dots, 2n\}, P(X = k - n) = P(Y = k - n)$ c'est-à-dire $\forall k' \in \{-n, \dots, n\}, P(X = k') = P(Y = k')$.

X et Y suivent la même loi.

2. (a) i. $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $S(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $Y_2 = SX_2$ donc $Y_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

ii. $P(X_2 = 0) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $P(X_2 = 1) = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{4}$ $P(X_2 = 2) = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$

$P(Y_2 = 2) = P((S = 1) \cap (X_2 = 2)) = P(S = 1)P(X_2 = 2)$ (par indépendance de S et X_2) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

De même, $P(Y_2 = 1) = P((S = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

$P(Y_2 = -1) = P((S = -1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1}{4}$ $P(Y_2 = -2) = P((S = -1) \cap (X_2 = 2)) = \frac{1}{8}$

Enfin $P(Y = 0) = P(X_2 = 0) = \frac{1}{4}$.

k	-2	-1	0	1	2
$P(Y = k)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

(b) Posons $Z_2 = X_2 - (S + 1)$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$S = 1$	$Z_2 = -2$	$Z_2 = -1$	$Z_2 = 0$
$S = -1$	$Z_2 = 0$	$Z_2 = 1$	$Z_2 = 2$

$Z_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$(Z_2 = 2) = (X_2 = 2) \cap (S = -1)$ donc par indépendance $P(Z_2 = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

De même, $P(Z_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $P(Z_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $P(Z_2 = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(Z_2 = -2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. On voit que Z_2 suit la même loi de Y_2 . (mais Z_2 n'est pas égal à Y_2 !)

3. a) $X = \text{rd.binomial}(2, 0.5, n)$

X contient une matrice à n lignes et 1 colonne. Chaque coefficient est une simulation de la loi $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

$B = \text{rd.binomial}(1, 0.5, n)$

$S = 2*B - \text{np.ones}((1, n))$

B contient une matrice à n lignes et 1 colonne. Chaque coefficient est une simulation de la loi $\mathcal{B}(1, 1/2)$, c'est-à-dire vaut 0 ou 1 avec équiprobabilité.

$2 \times 0 - 1 = -1$ $2 \times 1 - 1 = 1$ donc S contient une matrice à n lignes et 1 colonnes, dont chaque coefficient vaut 1 ou -1 avec équiprobabilité. (Elle représente donc la VAR S).

b) Z est une matrice à n lignes et 2 colonnes.

$Z[:, 0] = S * X1$ est le produit coefficient par coefficient des premières colonnes de S et X : il s'agit donc de n simulations de Y_2 .

$Z[:, 1] = X1 - S - \text{np.ones}((1, n))$ représente n simulations de $X_2 - (S + 1)$ (de même loi que Y_2).

Donc chaque coefficient de Z représente une simulation de la loi de Y_2 .

4. $X_n(\Omega) = [[0; n]]$. D'après la question 1 (a), M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}, M_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) e^{tk} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} e^{tk} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e^t}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = \frac{(e^t + 1)^n}{2^n}$ d'après la formule du binôme de Newton.

De même, $M_{Y_n}(t) = \sum_{k=-n}^n e^{tk} P(Y_n = k) = \sum_{k=-n}^{-1} e^{tk} P(Y_n = k) + P(Y_n = 0) + \sum_{k=1}^n e^{tk} P(Y_n = k)$

Avec $k' = -k$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k'=1}^n e^{-tk'} P(Y_n = -k') + P(Y_n = 0) + \sum_{k=1}^n e^{tk} P(Y_n = k) \\ &= \sum_{k'=1}^n e^{-tk'} P((S = -1) \cap (X_n = k')) + P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^n e^{tk} P((S = 1) \cap (X_n = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-tk} \frac{1}{2} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^n e^{tk} \frac{1}{2} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e^{-t}}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{e^t}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{e^{-t} + 1}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{e^t + 1}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (e^{-t} + 1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} (e^t + 1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} ((e^{-t} + 1)^n + (e^t + 1)^n) \\ (c) \quad (1 + e^{-t})^n &= \left(1 + \frac{1}{e^t}\right)^n = \left(\frac{e^t + 1}{e^t}\right)^n = \frac{(e^t + 1)^n}{e^{nt}} = e^{-nt} (1 + e^t)^n. \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} ((e^{-t} + 1)^n + e^{-nt} (1 + e^t)^n) = \frac{(1 + e^t)^n}{2^{n+1}} (1 + e^{-nt}) = \frac{(1 + e^t)^n}{2^n} \times \frac{1 + e^{-nt}}{2}$$

Soit H_n une VAR indépendante de X_n et $Z_n = X_n - H_n$

Alors $M_{Z_n}(t) = E(e^{t(X_n - H_n)}) = E(e^{tX_n} e^{-tH_n}) = E(e^{tX_n}) E(e^{-tH_n}) = M_{X_n}(t) M_{H_n}(-t)$.

(X_n et H_n sont indépendantes, donc e^{tX_n} et e^{-tH_n} aussi).

Considérons que H_n suit la loi uniforme sur $\{0, n\}$

$$\text{Or } M_{H_n}(t) = P(H_n = 0) e^{t0} + P(H_n = n) e^{tn} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{tn}$$

$$\text{donc } M_{Z_n}(t) = M_{Y_n}(t) M_{H_n}(-t) = \frac{(1 + e^t)^n}{2^n} \times \frac{1 + e^{-nt}}{2} = M_{Y_n}(t).$$

Donc d'après la question 1.c), Z_n suit la même loi que Y_n .

Partie II

Dans toute cette partie, on considère que 0 appartient à $\mathcal{D}_X$ (et $\mathcal{D}_Y$, et que K_X et K_Y sont de classe C^p sur un voisinage de 0.

5. (a) $M_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$ donc $K_X(0) = \ln(M_X(0)) = 0$

(b) $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tY} = e^{t(aX+b)} = e^{taX+tb} = e^{tb} e^{taX}$

Donc e^{tY} admet une espérance si et seulement si $e^{(at)X}$ admet une espérance, c'est-à-dire si et seulement si $at \in \mathcal{D}_X$.

Dans ce cas $E(e^{tY}) = e^{tb} E(e^{(at)X})$ donc $M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$ $\ln(M_Y(t)) = \ln(e^{tb}) + \ln(M_X(at))$

$K_Y(t) = bt + K_X(at)$

(c) Avec $a = -1$ et $b = 0$, on obtient : $\forall t$ tel que $-t \in \mathcal{D}_X$, $K_{-X}(t) = K_X(-t)$.

Si X et $-X$ suivent la même loi, $K_{-X} = K_X$ et $\mathcal{D}_{-X} = \mathcal{D}_X$ donc $\forall t \in \mathcal{D}_X$, $K_X(t) = K_X(-t)$.

La fonction K_X est paire.

Donc si p est un nombre impair, la dérivée p -ème $K_X^{(p)}$ est impaire. Donc $Q_p(X) = K_X^{(p)}(0) = 0$.

6. (a) $\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ $e^{t(X+Y)} = e^{tX} e^{tY}$ donc par indépendance, $E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX})E(e^{tY})$

$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ donc $\ln(M_{X+Y}(t)) = \ln(M_X(t)) + \ln(M_Y(t))$ $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.

(b) Par linéarité de la dérivée, on a donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$, $K_{X+Y}^{(p)}(t) = K_X^{(p)}(t) + K_Y^{(p)}(t)$.

Comme $0 \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ $K_{X+Y}^{(p)}(0) = K_X^{(p)}(0) + K_Y^{(p)}(0)$ $G_p(X+Y) = G_p(X) + G_p(Y)$

7. Si $U \longrightarrow U([0;1])$, $f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (f_U est à support sur $[0;1]$)

Et $\int_0^1 f_U(x) e^{tx} dx = \int_0^1 e^{tx} dx$ C'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X(t)$

existe et $M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} dx$

$M_X(0) = \int_0^1 1 dx = 1 \times (1 - 0) = 1$ Si $t \neq 0$, $M_X(t) = \left[\frac{1}{t} e^{tx} \right]_0^1 = \frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t} e^0 = \frac{e^t - 1}{t}$.

Donc $M_U(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

b) M_U est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ (quotient de fonctions dérivables, avec dénominateur non nul) et

$\forall t \neq 0$, $M_U'(t) = \frac{e^t - (e^t - 1)}{t^2} = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$.

c) $\frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{\frac{e^t - 1}{t} - 1}{t} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$ Or $e^t =_0 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $e^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$e^t - 1 - t \sim_0 \frac{t^2}{2}$ donc $\frac{M_U(t) - 1}{t} \sim_0 \frac{1}{2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_U(t) - M_U(0)}{t - 0} = \frac{1}{2}$ donc M_U est dérivable en 0 et $M_U'(0) = \frac{1}{2}$.

On voit que M_U' est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

$t.e^t =_0 t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) =_0 t + t^2 + o(t^2)$

Donc $te^t - e^t + 1 =_0 t + t^2 + o(t^2) - \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + 1 =_0 \frac{t^2}{2} + o(t^2) \sim_0 \frac{t^2}{2}$

Donc $M_U'(t) \sim_0 \frac{1}{2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} M_U'(t) = \frac{1}{2} = M_U'(0)$ donc M_U' est continue en 0.

Donc M_U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

8. a) $X \longrightarrow \mathcal{U}([\alpha; \beta])$, donc $X = \alpha + (\beta - \alpha)U$, où $U \longrightarrow \mathcal{U}([0;1])$

K_U est définie sur $\mathbb{R}$, donc d'après la question 5.b), K_X est aussi défini sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, K_X(t) = \alpha t + K_U((\beta - \alpha)t) = \alpha t + \ln(M_U((\beta - \alpha)t))$$

b. M_U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc K_X est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions de classe C^1 .

$$\begin{aligned} \text{Et } \forall t \in \mathbb{R}, K_X'(t) &= \alpha + \frac{(\beta - \alpha)M_U'((\beta - \alpha)t)}{M_U((\beta - \alpha)t)} \quad \text{Donc } Q_1(X) = K_X'(0) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)M_U'(0)}{M_U(0)} = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)\frac{1}{2}}{1} \\ &= \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = E(X). \end{aligned}$$

9. a) Si $T \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ e^{tT} admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} e^{tk}P(T = k)$ est absolument convergente.

$$\text{Or } e^{tk}P(T = k) = e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{on reconnaît la série exponentielle qui converge donc } \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbb{R}, M_T(t) = E(e^{tT}) = e^{\lambda \exp(t)} e^{-\lambda} = e^{\lambda(\exp(t)-1)} \quad \text{donc } K_T(t) = \lambda(e^t - 1).$$

$$(b) \text{ Donc } \forall p \geq 1, K_T^{(p)} = \lambda e^t \quad \text{donc } Q_p(T) = \lambda$$

$$10. \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \quad tx - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2tx) = -\frac{1}{2}((x-t)^2 - t^2)$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx = \exp(t^2/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) dx$$

On reconnaît à une constante près l'intégrale de la densité pour la loi $\mathcal{N}(t, 1)$. Donc l'intégrale converge.

$$b) \text{ Si } Z \longrightarrow \mathcal{N}(0,1), \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

Cette intégrale converge, donc d'après le théorème de transfert, e^{tZ} admet une espérance pour tout réel t , et

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx = \exp(t^2/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) dx$$

$$= \exp(t^2/2) \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) dx \text{ si } Y \longrightarrow \mathcal{N}(t, 1)$$

$$= \exp(t^2/2)$$

$$c) \text{ Donc } \forall t \in \mathbb{R}, K_Z(t) = \ln(M_Z(t)) = \frac{t^2}{2}$$

Soit $X \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors $X = \sigma X^* + \mu$, où $X^* \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$$\text{Donc d'après la question 5 b), } \forall t \in \mathbb{R}, K_X(t) = \mu t + K_{X^*}(\sigma t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

$$K_X \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, K_X'(t) = \mu + \sigma^2 t \quad K_X''(t) = \sigma^2 \quad \forall k \geq 3, K_X^{(k)}(t) = 0$$

$$\text{Donc } Q_1(X) = \mu \quad Q_2(X) = \sigma^2 \quad \text{et } \forall k \geq 3, Q_k(X) = 0$$

Partie III

$$11. \forall t \in I, K_X'(t) = \frac{M_X'(t)}{M_X(t)} \quad \text{donc } Q_1(X) = K_X'(0) = \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} \quad \text{Or } M_X'(0) = E(X) \text{ d'après l'énoncé}$$

$$\text{et } M_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1 \quad \text{donc } Q_1(X) = E(X).$$

$$\text{De même, } K_X''(t) = \frac{M_X''(t)M_X(t) - M_X'(t)^2}{M_X(t)^2} \quad \text{donc } Q_2(X) = \frac{E(X^2) \times 1 - E(X)^2}{1^2} = V(X) \text{ d'après la formule de}$$

Huygens.

12. D'après la formule du binôme (en s'aidant par exemple du triangle de Pascal) :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad \text{donc } (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$S^4 = (X_1 - X_2)^4 = X_1^4 - 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + X_2^4$$

On sait que X_1 et X_2 admettent des moments d'ordre 1, 2, 3 et 4, et par indépendance,

$$\begin{aligned} S^4 &\text{ admet une espérance et } E(S^4) = E(X_1^4) - 4E(X_1^3)E(X_2) + 6E(X_1^2)E(X_2^2) - 4E(X_1)E(X_2^3) + E(X_2^4) \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2 \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6(V(X) + E(X)^2)^2 \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6V(X)^2 + 12V(X)E(X)^2 + 6E(X)^4 \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6V(X)^2 + 12(E(X^2) - E(X)^2)E(X)^2 + 6E(X)^4 \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 12E(X^2)E(X)^2 - 6E(X)^4 + 6V(X)^2 \\ &= 2(E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4) + 6V(X)^2 \end{aligned}$$

$$(X - E(X))^4 = X^4 - 4E(X)X^3 + 6E(X)^2X^2 - 4E(X)^3X + E(X)^4$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \mu_4(X) &= E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X)^2E(X^2) - 4E(X)^3E(X) + E(X)^4 \\ &= E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X)E(X^2) - 3E(X)^4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6V(X)^2$$

(b) Quitte à réduire I, supposons qu'il est symétrique par rapport à 0.

$$\forall t \in I, e^{tS} = e^{t(X_1 - X_2)} = e^{tX_1} e^{-tX_2} \text{ donc par indépendance, } M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t) = M_X(t)M_X(-t)$$

Comme M_X est de classe C^4 sur I, M_S aussi, et $K_S = \ln(M_S)$ aussi.

Notons $M = M_S$ et $K = K_S$

$$\forall t \in I, M(t) = e^{K(t)} \text{ donc } M'(t) = K'(t)e^{K(t)} \quad M''(t) = K''(t)e^{K(t)} + K'(t)^2e^{K(t)} = K''(t)M(t) + K'(t)M'(t)$$

$$\begin{aligned} M^{(3)}(t) &= K^{(3)}(t)M(t) + K''(t)M'(t) + K''(t)M'(t) + K'(t)M''(t) \\ &= K^{(3)}(t)M(t) + 2K''(t)M'(t) + K'(t)M''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{(4)}(t) &= K^{(4)}(t)M(t) + K^{(3)}(t)M'(t) + 2(K^{(3)}(t)M'(t) + K^{(2)}(t)M''(t)) + K''(t)M''(t) + K'(t)M^{(3)}(t) \\ &= K^{(4)}(t)M(t) + 3K^{(3)}(t)M'(t) + 3K^{(2)}(t)M''(t) + K'(t)M^{(3)}(t) \end{aligned}$$

(c) Pour $t = 0$, on obtient :

$$(*) M_S^{(4)}(0) = Q_4(S)M_S(0) + 3Q_3(S)M_S'(0) + 3Q_2(S)M_S''(0) + Q_1(S)M_S^{(3)}(0)$$

$S = X_1 - X_2$ et $-S = X_2 - X_1$ suivent la même loi, donc les cumulants d'ordre impair sont nuls :

$$Q_1(S) = Q_3(S) = 0$$

$$\text{Donc } (*) \text{ devient : } M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S)M_S''(0)$$

Posons $M_X = M$ $M_S(t) = M_{X_1 - X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t) = M(t)M(-t)$ par indépendance.

$$\text{Donc } M_S'(t) = M'(t)M(-t) - M(t)M'(-t)$$

$$M_S''(t) = M''(t)M(-t) - M'(t)M'(-t) - M'(t)M'(-t) + M(t)M''(-t) = M''(t)M(-t) - 2M'(t)M'(-t) + M(t)M''(-t)$$

$$\text{Donc } M_S''(0) = 2M''(0)M(0) - 2M'(0)^2 = 2(E(X^2) - E(X)^2) = 2V(X)$$

$$\text{Or } V(S) = V(X_1 + (-X_2)) = V(X_1) + V(-X_2) \text{ (indépendance)} = V(X_1) + V(X_2) = 2V(X).$$

$$\text{Donc } M_S''(0) = V(S)$$

$$\text{Comme } K_S(t) = K_X(t) + K_X(-t) \quad K_S'(t) = K_X'(t) - K_X'(-t) \quad K_S''(t) = K_X''(t) + K_X''(-t)$$

$$\text{Donc } K_S''(0) = K_X''(0) + K_X''(0) \quad Q_2(S) = 2Q_2(X) = 2V(X) = V(S)$$

$$\text{Donc } (*) \text{ devient } M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3V(S)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } M_S^{(3)}(t) &= M^{(3)}(t)M(-t) - M''(t)M(-t) - 2M''(t)M(-t) + 2M'(t)M''(-t) + M'(t)M''(-t) - M(t)M^{(3)}(-t) \\ &= M^{(3)}(t)M(-t) - 3M''(t)M(-t) + 3M'(t)M''(-t) - M(t)M^{(3)}(-t) \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } M_S^{(4)}(t) = M^{(4)}(t)M(-t) - 4M^{(3)}(t)M'(-t) + 6M^{(2)}(t)M^{(2)}(-t) - 4M'(t)M^{(3)}(-t) + M(t)M^{(4)}(-t)$$

$$\text{En } 0 : M_S^{(4)}(0) = 2M^{(4)}(0)M(0) - 8M^{(3)}(0)M'(0) + 6M^{(2)}(0)^2$$

$$M_S^{(4)}(0) = 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2 = E(S^4) \text{ (d'après la question 9)}$$

$$\text{Donc } E(S^4) = Q_4(S) + 3V(S)^2.$$

13. Comme $K_S^{(4)}(t) = K_X^{(4)}(t) + K_X^{(4)}(-t)$, on a $Q_4(S) = 2Q_4(X)$ On a vu également que $V(S) = 2V(X)$

$$\text{Donc d'après les questions (a) et (c) précédentes : } 2\mu_4(X) + 6V(X)^2 = 2Q_4(X) + 12V(X)^2$$

$$\text{Donc } 2Q_4(X) = 2\mu_4(X) - 6V(X)^2 \quad Q_4(X) = \mu_4(X) - 3V(X)^2.$$