Concours blanc n°2
Mathématiques 2
Vendredi 15 Mars 2024 13h30-17h30

Dans tout l'énoncé, nous utiliserons les bibliothèques Python définies de la manière suivante :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
import numpy.random as rd
```

Exercice – HEC 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1) Exemple 1. Soit A la matrice de $\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) *Exemple 2.* Soit B la matrice de $\mathcal{B}_3(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (—>) *Python* suivantes :

```
B=np.array([[0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]])
P=np.array([[1,1,0],[1,-1,0],[0,0,1]])
print(np.dot(np.dot(al.inv(P),B),P))

—>    [[ 1.  0.  0.]
       [ 0. -1.  0.]
       [ 0.  0.  1.]]
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence *Python* précédente.

b) Donner une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3) a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$?

b) Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4) Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

_ id l'endomorphisme identité de E ;

_ F le noyau de l'endomorphisme (u + id) et G le noyau de l'endomorphisme (u – id) ;

_ p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = id$.

a) Justifier que l'image de (u – id) est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geq n$.

On suppose désormais que $1 \leq p < q$. Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

Problème – HEC/ESSEC 2019

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des moments et les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes.

Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.

Dans tout le problème :

_ on note (Ω, A, P) un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur (Ω, A).

_ sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $E(X)$ et $V(X)$;

_ pour toute variable aléatoire X et pour tout entier k pour lesquels la variable aléatoire X^k admet une espérance, on appelle moment d'ordre k de X le réel $E(X^k)$

_ pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln(M_X(t)) \ ;$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la fonction génératrice des moments et la fonction génératrice des cumulants de X)

_ lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe C^p sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle cumulant d'ordre p de X, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée p-ème de K_X en 0 :

$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

_ on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;

_ toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes et à valeurs entières ;

_ on note S une variable aléatoire à valeurs dans {-1; 1} dont la loi est donnée par :

$$P(S = -1) = P(S = 1) = \frac{1}{2}$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n; n]\!]$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = E(X^p)$.

(c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n; n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.

On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} P(X = k - n)x^k \\ G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} P(Y = k - n)x^k \end{cases}$

i. Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $G_X(e^t) = e^{nt}M_X(t)$.

ii. Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.

iii. En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoire X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.

(a) i. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.

ii. Calculer les probabilités $P(Y_2 = y)$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2.

(b) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2.

3. Le script Python suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
n = 10
X = rd.binomial(2,0.5,n)
B = rd.binomial(1,0.5,n)
S = 2*B-np.ones((1,n))
Z=np.zeros((n,2))
Z[:,0]=S*X1
Z[:,1]=X1-S-np.ones((1,n))
```

(a) Que contiennent les variables X et S après l'exécution des quatre premières instructions ?

(b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des cinq instructions, chacun des coefficients de la matrice Z contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = S.X_n$.

(a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\left((1 + e^{t})^n + (1 + e^{-t})^n\right)$

(c) En utilisant l'égalité $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt}(1 + e^{t})^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire discrète et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction K_X.

(a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$.

Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité :

$$K_Y(t) = bt + K_X(at).$$

(c) On suppose ici que les variables aléatoires X et -X suivent la même loi.

Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.

(a) Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$, on a :

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t).$$

(b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et X + Y.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle [0; 1].

(a) Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

(b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

(c) Trouver la limite du quotient $\dfrac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

(d) Montrer que la fonction M_U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

8. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

(a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question 7.

(b) Justifier que la fonction K_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = E(X)$.

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

(a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.

(b) En déduire tous les cumulants de T.

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(a) Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)dx$.

(b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ M_Z(t) = \exp\left(- \dfrac{t^2}{2}\right)$.

(c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$.

Partie III. Cumulant d'ordre 4.

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X discrète telle que M_X est de classe C^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.

On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0.

Autrement dit, pour tout $k \in [[1; 4]]$, on a $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

De plus, on pose : $\mu_4(X) = E\big((X - E(X))^4\big)$.

11. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.

12. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

On pose $S = X_1 - X_2$.

(a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :

$$E(S^4) = 2\,\mu_4(X) + 6(V(X))^2$$

(b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe C^4 sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M''_S(t) + K'_S(t)M_S^{(3)}(t).$$

(c) En déduire l'égalité : $E(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2$.

12. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation :

$$Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2.$$