ECG2 - Concours blanc n°2
Mardi 12 Mars 2024
8h – 12h

Exercice 1 – d'après EML 2018

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Etude d'une équation différentielle

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \exp(-f(t))$

4. Déterminer deux réels a et b tels que $y(t) = (a.t + b)e^{-t}$ est solution de (E).
5. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
6. Quelles sont les trajectoires convergentes ?
7. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}dt$.

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0; +\infty[$.
10. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
11. a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.

On admet quer la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe C^2 sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0;+\infty[\times \mathbb{R},\ H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^{y}.$$

13. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

b. Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.

14. a. Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a; \ln(a))$.

b. Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 = a - 1 \end{cases}$$

c. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 2 – EDHEC 2016

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2. (a) En déduire la seule valeur propre de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de A associé à la valeur propre de A.

4. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

(c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n.2^{n-1}A - (n-1)2^nI$$

(b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

(c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5(a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 3 – EDHEC 2021

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1) a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } x < 1 \end{cases}$

peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer G(x) selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

2) On considère deux variables aléatoires (X_1, X_2) mutuellement indépendantes, et suivant toutes les deux la même loi que X. On pose $M_2 = \max(X_1, X_2)$ et on admet que M_2 est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) On note G_2 la fonction de répartition de M_2. Exprimer $G_2(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_2(x)$ en fonction de x.

b) On pose $Y_2 = \dfrac{M_2}{\sqrt{2}}$. Justifier que la fonction de répartition F_2 de Y_2 est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_2(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^2 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \text{ si } x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

c) Montrer que Y_2 est une variable à densité et déterminer une densité de Y_2.

3) On considère une variable aléatoire U, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et qui suit la loi $\mathcal{U}([0\,;1[)$, et on pose $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

a) Déterminer les valeurs prises par V.

b) Montrer que V suit la même loi que X.

c) En déduire un programme Python qui simule la loi de Y_2.

Exercice 4 – EDHEC 2021

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de]0;1[, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1er pile par A (resp. par B) lors de la k-ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la k-ième manche ».

On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n-ième manche ».

1) Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

c) Montrer que $P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q.

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2) Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $(X_n < Y_n)$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1\cap\ldots\cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall\, n \geq 2,\ P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour n = 1.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \frac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $P(E) = 0$.

Partie 2 : informatique

3) Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
import numpy.random as rd

p=float(input('Entrez une valeur pour p : '))
c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
    X = ------
    Y=------
    c=------
if X<Y:
    ------
else:
    ------
print(c)
```