ECG2 : Correction du D.M. n°1 niveau 1

Exercice 1 – EM Lyon 2012

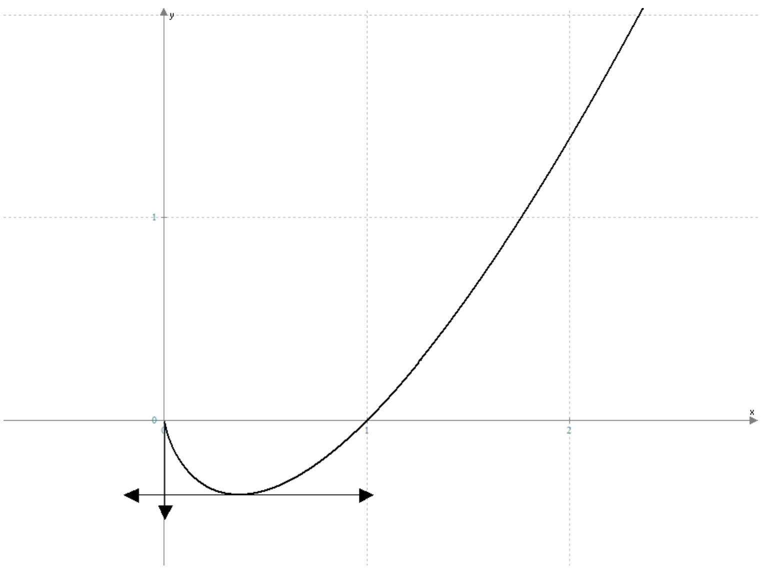
1. f est continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues.
$\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0 = f(0)$ (croissances comparées) donc f est continue en 0. Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions C^1 et $\forall\, t > 0$, $f'(t) = 1 \times \ln(t) + t \times \dfrac{1}{t} = \ln(t) + 1$

3. $\ln(t) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(t) > -1 \Leftrightarrow t > e^{-1} \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{e}$. $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$

t	0		1/e		$+\infty$
f '(t)		–	0	+	
f(t)	0	↘	-1/e	↗	$+\infty$



4. f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et
$\forall\, t > 0$, $f''(t) = \dfrac{1}{t} > 0$
donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.

5. a) $\dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \dfrac{t\ln(t)}{t} = \ln(t)$
donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = -\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0 et Γ admet une demi- tangente verticale en 0.
b. $f(0) = 0$
si $t \neq 0$ $f(t) = 0 \Leftrightarrow t\ln(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = 0$ (car $t \neq 0$) $\Leftrightarrow t = 1$.
Donc (0;0) et (1;0) sont les points d'intersection avec l'axe des abscisses.
c. $\ln(t) = \ln(1 + (t - 1))$ $\lim\limits_{t \to 1} t - 1 = 0$ donc $\ln(t) \sim_1 t - 1$ De plus $t \sim_1 1$ donc $f(t) \sim_1 t - 1$.
Ou : $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{f(t)}{t-1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1} = f'(1) = 1$ donc $f(t) \sim_1 t - 1$
d.

6. Sur [0;1/e], f est négative, donc l'équation n'a pas de solution.
f est continue et strictement croissante sur $[1/e; +\infty[$ et $2 \in [-1/e; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1/e; +\infty[$.
De plus $f(\alpha) = 2$ $f(2) = 2\ln(2) < 2$ car $\ln(2) < 1$ $f(3) = 3\ln(3) > 3$ car $\ln(3) > 1$
donc $f(2) < f(\alpha) < f(3)$. Comme f est croissante sur l'intervalle, $2 < \alpha < 3$.

7. $f(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de f.
Si $t \neq 0$, $f(t) = t \Leftrightarrow t\ln(t) = t \Leftrightarrow \ln(t) = 1$ (car $t \neq 0$) $\Leftrightarrow t = e$.
Donc il y a 2 points fixes : 0 et e.

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n - 1 \leq u_n \leq n + 1$.
$\forall n \geq 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{n+1}{n}$ $1 - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{u_n}{n} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$ donc $u_n \sim_{+\infty} n$.