ECG2 – Devoir à la maison n°1 – Niveau 1

Exercice 1

On considère l'application $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t.\ln(t) \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.

c) Montrer que $f(t) \sim_1 t - 1$.

d) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0{,}36 \leq e^{-1} < 0{,}37$.

6. Montrer que l'équation $f(t) = 2$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ et montrer que $2 < \alpha < 3$.
7. f admet-elle des points fixes ? Si oui, donner leurs valeurs.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n + (-1)^n$.

A l'aide d'un encadrement, déterminer un équivalent simple de u_n.