Exercice 1 – EDHEC 2017

1) F_n est continue sur $]-\infty; 0[$ comme fonction nulle et sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues.

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x})^n = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ donc F_n est continue en 0. Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b) De même, F_n est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ comme fonction nulle et sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions de classe C^1 .

2) $1 - (1 - e^{-x})^n = 1 - \exp(n \cdot \ln(1 - e^{-x})) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \cdot \ln(1 - e^{-x}) = 0$.

Comme $e^X - 1 \sim X$, on a : $\exp(n \cdot \ln(1 - e^{-x})) - 1 \sim n \cdot \ln(1 - e^{-x})$ Donc $1 - (1 - e^{-x})^n \sim_{+\infty} -n \cdot \ln(1 - e^{-x})$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$ on a : $\ln(1 - e^{-x}) \sim_{+\infty} -e^{-x}$ donc $-n \cdot \ln(1 - e^{-x}) \sim_{+\infty} n e^{-x}$.

Donc $1 - (1 - e^{-x})^n \sim_{+\infty} n e^{-x}$

3) a) $x + \ln(n) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\ln(n)$. Donc $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ (1 - e^{-x - \ln(n)})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \end{cases}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} -\frac{e^{-x}}{n}$ donc $n \cdot \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} -e^{-x}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$

c) $x \geq -\ln(n) \Leftrightarrow -x \leq \ln(n) \Leftrightarrow n \geq e^{-x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n supérieur à e^{-x} , on a : $G_n(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \exp(-e^{-x})$

Exercice 2 – Ecricome 2017

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2a} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$.

$\ln(x) =_{+\infty} o(x^{2a})$ donc $\varphi(x) \sim_{+\infty} -ax^{2a}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et :

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x} \quad 1 - 2a^2 x^{2a} > 0 \Leftrightarrow 2a^2 x^{2a} < 1 \Leftrightarrow x^{2a} < \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a} \Leftrightarrow x < x_0$$

$$\varphi(x_0) = \ln\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}\right) - a \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - \frac{1}{2a} = -\frac{1}{2a} \ln(2a^2) - \frac{1}{2a} = \frac{-\ln(2a^2) - 1}{2a}$$

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\varphi(x_0)$	$-\infty$

3. Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}} \quad a^2 < \frac{1}{2e} \quad 2a^2 < \frac{1}{e} \quad \ln(2a^2) < \ln\left(\frac{1}{e}\right) \quad \ln(2a^2) < -1 \quad -\ln(2a^2) - 1 > 0 \quad \varphi(x_0) > 0$.

φ est continue et strictement croissante sur $]0; x_0[$. De plus $0 \in]-\infty; \varphi(x_0)[$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution z_1 sur $]0; x_0[$. De la même manière, l'équation admet une unique solution z_2 sur $]x_0; +\infty[$. Donc l'équation admet deux solutions z_1 et z_2 sur $]0; +\infty[$, avec $z_1 < x_0 < z_2$.

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}} \quad \varphi(x_0) = 0$: l'équation admet une unique solution x_0 . (il n'y a pas d'autres solutions car φ est strictement négative en dehors de x_0). De plus $\frac{1}{2a^2} = e$ et $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2e}}} = \frac{\sqrt{2e}}{2} = \sqrt{\frac{e}{2}}$ donc $x_0 = \exp\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$.

Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}} \quad \varphi(x_0) < 0$: le maximum de la fonction φ est strictement négatif, donc l'équation n'admet pas de solution.