ECG2 : Devoir à la maison n°1 – Niveau 2

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul fixé.

Soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

1) a) Montrer que F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F_n est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2) Montrer que $1 - F_n(x)$ est équivalent à ne^{-x} lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

3) Soit G_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = F_n(x+\ln(n))$.

a) Déterminer explicitement $G_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - a.x^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2. Etudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaitre dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$?