D.M. n°10 - Correction

Exercice 1 – EDHEC 2021

1) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$.

2) f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall$ (x, y) $\in \mathbb{R}^2$,

$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y \qquad \partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x$

3) (x, y) point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - y = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$

$y^4 - y = 0 \Leftrightarrow y(y^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 0$ (et donc x = 0) ou y = 1 (et donc x = 1).

Il y a deux points critiques : A(0, 0) et B(1, 1).

3) a) f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall$ (x, y) $\in \mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,1} f(x, y) = 6x \qquad \partial^2_{2,1} f(x, y) = -3 \qquad \partial^2_{1,2} f(x, y) = -3 \qquad \partial^2_{2,2} f(x, y) = 6y$

b) f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc les seuls extrema possibles sont les points critiques.

Etude en A(0, 0) : Matrice hessienne : $H = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $H - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$. λ valeur propre de H $\Leftrightarrow H - \lambda I_2$ non inversible

$\Leftrightarrow (-\lambda)^2 - (-3)(-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ ou 3.

Les deux valeurs propres sont de signes opposés, donc il s'agit d'un point col.

Etude en B(1, 1) : Matrice hessienne : $H' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ donc $H' - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

λ valeur propre de H' $\Leftrightarrow (6 - \lambda)^2 - 3^2 = 0 \quad (6 - \lambda - 3)(6 - \lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = 9$

Les deux valeurs propres sont strictement positives, donc il s'agit d'un minimum local. (et f(1, 1) = -1)

Ou : En développant le polynôme, on trouve : $\lambda^2 - 12\lambda + 27 \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a} = 27 > 0$ donc les valeurs propres de même signe. Et $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} = 12 > 0$ donc les deux valeurs propres sont strictement positives.

4) $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x^3$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x, 0) = -\infty$. La fonction n'est donc pas minorée.

Il ne s'agit pas d'un minimum global. (Ou par exemple : f(-2,0) = -8 < -1 donc -1 n'est pas un minimum global)

Exercice 2

1)
```
import numpy.random as rd
x=rd.rand()
x2=rd.rand()
y=min(x,x2)
```
Ou :
```
x=rd.uniform(0,1,2)    #Tableau qui contient deux réalisations indépendantes de la loi U([0 ;1])
y=min(x)
```

2) a) $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 1 - P(Y > x) = 1 - P((X < x) \cap (X' > x))$

$= 1 - P(X > x)P(X < x')$ (X, X' indépendantes)

$= 1 - P(X > x)^2$ (même loi)

$= 1 - (1 - F_X(x))^2$

Or, $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Si x < 0, $F_Y(x) = 1 - (1 - 0)^2 = 0$ Si $0 \leq x \leq 1$, $F_Y(x) = 1 - (1 - x)^2$

Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - (1-1)^2 = 1$ $\quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

3) Remarque : X est à valeurs dans [0 ;1], donc $1 - X \geq 0$. La définition a bien un sens.

a) $0 \leq X \leq 1$ donc $-1 \leq -X \leq 0$ $\quad 0 \leq 1 - X \leq 1$ $\quad 0 \leq \sqrt{1-X} \leq 1$ $\quad -1 \leq -\sqrt{1-X} \leq 0$ $\quad 0 \leq 1 - \sqrt{1-X} \leq 1$

$0 \leq Z \leq 1$. Z est à valeurs dans [0 ;1] donc $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

b) Si $0 \leq x \leq 1$ $\quad -1 \leq -x \leq 0$ $\quad 0 \leq 1 - x \leq 1$ $\quad 0 \leq (1-x)^2 \leq 1$ $\quad -1 \leq -(1-x)^2 \leq 0$ $\quad 0 \leq 1 - (1-x)^2 \leq 1$.

c) $\forall x \in [0\,;1]$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(1 - \sqrt{1-X} \leq x) = P(-\sqrt{1-X} \leq x - 1) = P(\sqrt{1-X} \geq 1 - x)$

Or $x \leq 1$ donc $1 - x \geq 0$

Donc $F_Z(x) = P(1 - X \geq (1-x)^2) = P(-X \geq (1-x)^2 - 1) = P(X \leq 1 - (1-x)^2) = F_X(1 - (1-x)^2)$

D'après la question b) $0 \leq 1 - (1-x)^2 \leq 1$ donc $F_Z(x) = F_X(1 - (1-x)^2) = 1 - (1-x)^2$

Donc $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ donc $F_Z(x) = F_Y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Z suit la même loi que Y.

d) En Python :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

x=rd.rand()
z=1-np.sqrt(1-x)
```