

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

- 1) Justifier que  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .  
b) Déterminer les points critiques de  $f$ .
- 3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .  
b) Vérifier que  $f$  ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
- 4) Cet extremum est-il global ?

### Exercice 2

Soit  $X$  et  $X'$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la même loi  $\mathcal{U}([0 ; 1])$ .

On pose  $Y = \min(X, X')$ .

- 1) Proposer un script Python qui simule  $Y$ .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .
- 3) On pose  $Z = 1 - \sqrt{1 - X}$ .
  - a) Déterminer  $Z(\Omega)$ . En déduire l'expression de  $F_Z(x)$  pour  $x < 0$  et  $x > 1$
  - b) Montrer que  $\forall x \in [0 ; 1], 0 \leq 1 - (1 - x)^2 \leq 1$
  - c) Montrer que  $Z$  suit la même loi que  $Y$ .
  - d) En déduire un deuxième script Python qui simule  $Y$ .