Devoir à la maison n°11 –Correction

Exercice 1

1. a) Les points d'équilibre de (S) sont les solutions du système AX = 0. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$. Les points d'équilibres sont les points $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & -3-\lambda \end{pmatrix}$

λ est valeur propre de A $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 3(-1) = 0$

$\Leftrightarrow -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -2$.

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A a deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

On a déjà vu que $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $(A + 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow 3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x$. Donc $E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres, donc d'après la formule de changement de base,

$A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ Vérification : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont négatives ou nulles. Donc toutes les trajectoires sont convergentes.

d) On pose $Y = P^{-1}X$. Par linéarité de la dérivée, on a donc $Y' = P^{-1}X'$

$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}PDP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. $Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = -2y_1 \\ y_2' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = ae^{-2t} \\ y_2 = b \end{cases}$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^{-2t} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-2t} + b \\ 3ae^{-2t} + b \end{pmatrix}$.

3) a) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit : $X' = AX + B \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X + B \Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}PDP^{-1}X + P^{-1}B$

$\Leftrightarrow P^{-1}X' = D(P^{-1}X) + P^{-1}B \Leftrightarrow Y' = DY + P^{-1}B$, avec $Y = P^{-1}X$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 + e^{3t} \\ 3 - e^{3t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' + 2y_1 = \frac{1}{2}(e^{3t} - 1) \\ y_2' = \frac{1}{2}(3 - e^{3t}) \end{cases}$$

Les solutions des équations homogènes ont été trouvées en 1.d).

Solution particulière de $y'_1 + 2y_1 = \frac{1}{2}e^{3t}$: Posons $y_1(t) = \alpha e^{3t}$ alors $y_1'(t) = 3\alpha e^{3t}$

$y'_1(t) + 2y_1(t) = e^{3t} \Leftrightarrow 3\alpha e^{3t} + 2\alpha e^{3t} = \frac{1}{2}e^{3t} \Leftrightarrow 5\alpha = \frac{1}{2}$ (car $e^{3t} \neq 0$) $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{10}$.

Solution particulière de $y'_1 + 2y_1 = -\frac{1}{2}$ Cherchons une solution particulière constante :

Alors $y'_1(t) + 2y_1(t) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1(t) = -\frac{1}{4}$

Donc par superposition des solutions, les solutions de l'équation en y_1 sont : $y_1(t) = \frac{1}{10}e^{3t} - \frac{1}{4} + ae^{-2t}$, $a \in \mathbb{R}$.

Pour la deuxième équation, il suffit de trouver les primitives : $y_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{6}e^{3t} + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Enfin $X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10}e^{3t} - \frac{1}{4} + ae^{-2t} \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{6}e^{3t} + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15}e^{3t} + \frac{3}{2}t + ae^{-2t} + b - \frac{1}{4} \\ \frac{2}{15}e^{3t} + \frac{3}{2}t + 3ae^{-2t} + b - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Exercice 1 - d'après EML 2016

1. a) g est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) > 0$ et $\exp(-\exp(-x)) > 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = -\exp(-x)$ alors $u'(x) = \exp(-x)$
Soit $T \geq 0$. $\int_0^T g(x)dx = [\exp(-\exp(-x))]_0^T = \exp(-\exp(-T)) - \exp(-\exp(-0)) = \exp(-\exp(-T)) - \exp(-1)$
$\lim_{T\to+\infty} \exp(-T) = 0$ donc $\lim_{T\to+\infty} \exp(-\exp(-T)) = 1$ Donc $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut $1 - \exp(-1)$.
De même, s $T \leq 0$, $\int_T^0 g(x)dx = \exp(-1) - \exp(-\exp(-T))$
$\lim_{T\to-\infty} \exp(-T) = +\infty$ donc $\lim_{T\to-\infty} \exp(-\exp(-T)) = 0$. Donc $\int_{-\infty}^0 g(x)dx$ converge et vaut $\exp(-1)$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut $\exp(-1) + 1 - \exp(-1) = 1$. Donc g est une densité de probabilité.
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_{-\infty}^0 g(t)dt + \int_0^x g(t)dt = e^{-1} + \exp(-\exp(-x)) - e^{-1} = \exp(-\exp(-x))$
Ou : Soit $T \leq x$ $\int_T^x g(t)dt = [\exp(-\exp(-t))]_T^x = \exp(-\exp(-x)) - \exp(-\exp(-T))$ et $\lim_{T\to-\infty} \exp(-\exp(-T)) = 0$…
2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P(\text{"tous sont} \leq x\text{"}) = P((X_1 \leq x)\cap\dots\cap(X_n \leq x))$
$= P(X_1 \leq x)\dots P(X_n \leq x)$ (par indépendance) $= F_{X_1}(x)^n$ (car $X_1, \dots, X_n$ même loi) $F_{T_n}(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^n}$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(U_n \leq x) = P(T_n - \ln(n) \leq x) = P(T_n \leq x + \ln(n)) = \frac{1}{(1+e^{-x-\ln(n)})^n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{e^{\ln(n)}}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{n}$ $\quad -n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} -e^{-x}$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp(-e^{-x})$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = F_Z(x)$, où Z est la VAR définie dans la première question.
Donc la suite (U_n) converge en loi vers Z.
7. a) $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ donc par linéarité, $E(Y_n) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = 0$
$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \dots + V(X_n))$ (par indépendance) $= \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.
b) Les variables (X_n) sont indépendantes, de même loi et admettent une espérance et une variance.
Donc d'après le théorème de la limite centrée, $Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \frac{Y_n}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{Y_n\sqrt{n}}{\sigma}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq Y_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} P(-1 \leq Y_n^* \leq 1) = P(-1 \leq Y \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$