Devoir à la maison n°11

Exercice 1

On considère les systèmes différentiels (S) : $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 3x_2 \end{cases}$ et (S_2) : $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 1 \\ x_2' = 3x_1 - 3x_2 + e^{3t} \end{cases}$

(de variable $t \in \mathbb{R}$)

1) Résolution de (S) :

a) Déterminer l'ensemble des points d'équilibre de (S).

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice D diagonale (avec des coefficients diagonaux croissants) et une matrice P inversible (avec comme première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$) telles que $A = PDP^{-1}$.

Donner l'expression de P, D et P^{-1}.

c) Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.

d) Résoudre le système différentiel (S).

Partie facultative :

2) a) Par une méthode similaire à (S), montrer que le système (S_2) est équivalent $\begin{cases} y_1' + 2y_1 = \dfrac{1}{2}(e^{3t} - 1) \\ y_2' = \dfrac{1}{2}(3 - e^{3t}) \end{cases}$

b) En déduire les solutions de (S_2).

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$

On admet que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

On admet que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

On admet enfin que X admet une espérance égale à 0, et que X admet également un écart-type, que l'on notera σ.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(-x)\exp(-\exp(-x))$.

a) Montrer que g est une densité de probabilité.

b) Si Z une variable aléatoire de densité g, déterminer la fonction de répartition de Z.

2. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(U_n \leq x) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

c) En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

3. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

a) Déterminer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de σ.

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq Y_n \leq \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(1) - 1$.