Devoir à la maison n°2 - Correction

Exercice 1

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{n^2}$ donc $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

$\forall\, n \geq 2$, $1 - \dfrac{1}{n^2} \leq 1$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \leq 0$ donc $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \geq 0$.

Les séries sont à termes positifs et $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ converge aussi.

2. $\forall\, n \geq 2$, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2}\right)\ln\left(\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)$

Pour $N \geq 2$, posons $S_N = \sum\limits_{n=2}^{N} u_n = \sum\limits_{n=2}^{N} -(\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n))$

$= -\sum\limits_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \sum\limits_{n=2}^{N} \ln(n-1) + 2\sum\limits_{n=2}^{N} \ln(n)$

$= -\big(\ln(3) + \ldots + \ln(N-1) + \ln(N) + \ln(N+1)\big) - \big(\ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(N-1)\big)$
$+ 2\big(\ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(N-1) + \ln(N)\big)$

$= -\ln(1) + \ln(2) + \ln(N) - \ln(N+1) = \ln\left(\dfrac{2N}{N+1}\right)$

$\dfrac{2N}{N+1} \sim_{+\infty} \dfrac{2N}{N} \sim_{+\infty} 2$ donc $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N = \ln(2)$. Donc $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.

3) La fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ est concave sur $]-1; +\infty[$, donc sa courbe se situe sous sa tangente, en particulier en 0. Or $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\forall\, x > -1$. Donc $f(0) = 0$ $f'(0) = 1$

Equation de la tangente $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Donc $\forall\, x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Ou : Posons $g(x) = x - \ln(1 + x)$. g est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et

$\forall\, x > -1$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1 + x - 1}{1 + x} = \dfrac{x}{1+x}$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = 0 - \ln(1) = 0$

D'après le tableau de variation, $g(x) \geq 0$ $\forall\, x > -1$

Donc $x \geq \ln(1 + x)$ $\forall\, x > -1$

Ou encore : Par convexité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-1 ;+\infty[$ on a : $\forall\, x > -1$, $e^x \geq 1 + x$

Par croissance de la fonction ln (et comme $1 + x > 0$) : $x \geq \ln(1 + x)$

b) $\forall n \geq 2$, $-\dfrac{1}{n^2} > -1$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \leq -\dfrac{1}{n^2}$ donc $u_n \geq \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\forall\, N \geq 2$, $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n \geq \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n^2}$ et en passant à la limite $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n \geq \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $\ln(2) \geq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{1^2}$

Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \leq 1 + \ln(2)$.

Exercice 2

1. a) $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{a(n+1)}{n(n+1)} + \dfrac{bn}{n(n+1)} = \dfrac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$

Par identification des coefficients, $\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$ donc $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Ou : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \dfrac{n+1}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} x^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= x\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} - \sum_{n'=2}^{N+1} \frac{x^{n'}}{n'} \text{ (avec } n' = n + 1)$$

$$= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} - \left(\sum_{n'=1}^{N+1} \frac{x^{n'}}{n'} - \frac{x^1}{1}\right) = x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} - \sum_{n'=1}^{N+1} \frac{x^{n'}}{n'} + x$$

$\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \dfrac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ De même, $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n'=1}^{N+1} \dfrac{x^{n'}}{n'} = -\ln(1-x)$.

Donc la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x.\ln(1-x) + \ln(1-x) + x = \varphi(x)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{N+1}$ (somme télescopique)

$\lim\limits_{N \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{N+1} = 1$ donc la série converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$ Or $\varphi(1) = 1$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.