Devoir à la maison n°2

Exercice 1

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = - \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ converge.

2. En remarquant que $\forall\, n \geq 2,\ 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$, déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$.

3. a) Montrer que $\forall\, x \in\ ]-1; +\infty[,\ \ln(1 + x) \leq x$

b) En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \ln(2)$.

Exercice 2

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty; 1]$ par :

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 1],\ \varphi(x) = \begin{cases} x + (1 - x)\ln(1 - x) \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$.

On admet que $\forall\, x \in [0;1[$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$.

1. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0;1[$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$

2. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.