Devoir à la maison n°3 - Correction

Exercice 1 – EDHEC 2014 1. $\frac{\theta}{1+\theta} > 0$ donc $\forall$ k $\in \mathbb{N}$, $\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geq 0$ et $\frac{1}{1+\theta} > 0$ donc $u_k \geq 0$.

$\sum u_k = \frac{1}{1+\theta} \sum \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$ $\quad 0 < \theta < 1 + \theta$ donc $0 < \frac{\theta}{1+\theta} < 1$ donc la série converge et

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta} \times \frac{1}{1 - \frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta} \times \frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1$. Donc la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.

2. a) Y = X + 1 donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall$ k $\in \mathbb{N}^*$, P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k – 1)

$= \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1} = \left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right)^{k-1} \frac{1}{1+\theta}$ donc $Y \longrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$.

Donc $E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1 + \theta$ $\quad V(Y) = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \frac{\theta}{1+\theta} \times (1+\theta)^2 = \theta(1+\theta)$.

X = Y – 1 donc E(X) = E(Y) – 1 = θ et $V(X) = 1^2V(Y) = \theta(1 + \theta)$.

Exercice 2 – Ecricome 2014

1. Il y a n lancers indépendants. La probabilité de faire pile à un lancer est p. X_n est le nombre de piles obtenus.

Donc $X_n \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $E(X_n) = np$. $V(X_n) = np(1 – p)$.

2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ ($\forall$ n $\in \mathbb{N}$, si on obtient n faces puis deux piles Y = n, donc toutes les valeurs entières sont possibles)

3. $P(Y = 0) = P(P_1P_2) = p^2$ (lancers indépendants) $\quad P(Y = 1) = P(P_1F_2P_3 \cup F_1P_2P_3) = 2qp^2$

$P(Y = 2) = P(P_1F_2F_3P_4 \cup F_1P_2F_3P_4 \cup F_1F_2P_3P_4) = 3q^2p^2$.

4. (Y = n) = "le deuxième pile arrive au n + 2 ème tirage" = "on a exactement 1 pile lors des n+1 premiers tirages, puis on fait pile au (n+2)ème tirage" $= (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$

5. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = P((X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}})$

Les deux événements sont indépendants, donc :

$P(Y = n) = P(X_{n+1} = 1)P(\overline{F_{n+2}}) = \binom{n+1}{1} p^1q^{n+1-1} \times p = (n + 1)p^2q^n$.

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)p^2q^n = p^2 \sum_{n'=1}^{+\infty} n'q^{n'-1}$ (avec n' = n + 1) $= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1$.

7. $\sum_{n \geq 0} nP(Y = n) = \sum_{n \geq 0} n(n+1)p^2q^n = \sum_{n' \geq 1} (n'-1)n'p^2q^{n'-1}$ (avec n' = n + 1)

$= p^2q \sum_{n' \geq 1} n'(n'-1)q^{n'-2}$ $\quad -1 < q < 1$ donc la série converge absolument.

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = p^2q \sum_{n'=1}^{+\infty} n'(n'-1)q^{n'-2} = p^2q \times \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2p^2q}{p^3} = \frac{2q}{p}$.

8. $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Y_k = n)$ = "Parmi les n + k – 1 premiers tirages, il y a n faces et k – 1 piles, et le (n + k)ème tirage est un pile" $= (X_{n+k-1} = k - 1) \cap P_{n+k}$.

Par indépendance : $P(Y_k = n) = P(X_{n+k-1} = k - 1)P(_{n+k}) = \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1}q^np = \binom{n+k-1}{k-1} p^kq^n$.