Devoir à la maison n°3

Exercice 1

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = u_k$.

2. On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.
On procède à l'expérience suivante E : « On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce ».
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer »;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre : « FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE » alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience E.

1. Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.
2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
3. Donner les valeurs des probabilités : $P(Y = 0)$, $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$.
4. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $(Y = n)$ et $(X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$ sont égaux.
5. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = (n + 1)p^2q^n$
6. Vérifier par le calcul que : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1$
7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance E(Y) et donner sa valeur.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.