ECG2 : Devoir à la maison n°4 – Niveau 2

Ce sujet comporte deux problèmes de décision inspirés de situations concrètes.
Ces problèmes sont indépendants.

Problème 1 : prédire le dernier succès

Présentation : soit un entier $n \geq 1$. On répète n fois, de façon indépendante, une même expérience qui conduit à un succès avec la probabilité $p \in]0;1[$ ou à un échec avec la probabilité $1 - p$.
Le jeu proposé est de deviner quand aura lieu le dernier succès. A chaque succès, on peut décider d'annoncer ou non qu'il s'agit du dernier de toute la série d'expériences. On ne peut faire qu'une annonce par partie.
Le jeu est gagné si, à l'issue des n expériences, on a fait une annonce et qu'elle s'est révélée exacte. Le jeu est perdu si l'on n'a pas fait d'annonce ou si l'on s'est trompé en annonçant le dernier succès.
Stratégie : on choisit un entier $s \in [\![1, n]\!]$, et on laisse passer les $n - s$ premières expériences. Ensuite, dès qu'un succès se présente, on annonce que ce sera le dernier.
On note P_s la probabilité de gagner en utilisant cette stratégie.
1. Montrer que la stratégie est gagnante si et seulement si il y a exactement un succès lors des s dernières expériences.
2. En déduire une expression de P_s en fonction de p et de s.
3. Montrer l'équivalence : $\dfrac{P_{s+1}}{P_s} \geq 1 \Leftrightarrow s \leq \dfrac{1}{p} - 1$.
4. En déduire que la probabilité P_s est maximale pour une ou deux valeurs de s.
5. Un exemple : on lance 10 fois un dé bien équilibré, et on doit prédire quand survient le dernier six. Quel choix convient-il de faire ?

Problème 2 : Chercher une place de parking

Présentation : On est en voiture au départ d'une rue infiniment longue et à sens unique. On doit se rendre à un point d'arrivée situé à une certaine distance du point de départ et on cherche à se garer le plus près possible de l'arrivée. A partir d'où doit-on commencer à accepter une place libre ?

Mise en place : Au départ on est au numéro 0 de la rue. Pour chaque entier naturel n, il y a une place de parking au numéro n, qui peut libre avec la probabilité $p \in]0;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places se font indépendamment les unes des autres. L'arrivée est au numéro d.

Stratégie : On se donne $s \in \{0,.., d\}$ et on conduit sans s'arrêter jusqu'au numéro s de la rue. On accepte alors la première place libre à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place trouvée par cette méthode. La distance à l'arrivée est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée.

1. Loi de X

a) Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'événement "la place au numéro k est occupée"

Pour $n \in X(\Omega)$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction des événements A_k.

c) Déterminer la loi de X.

d) Vérifier que $X - s + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de X.

2. Calcul de $D_s = E(|X - d|)$

a) Montrer que la variable aléatoire $|X - d|$ admet une espérance.

b) Etablir : $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (n - d)P(X= n) - 2 \sum_{n=s}^{d} (n - d)P(X = n)$

c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, donner la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{N} x^k$ en fonction de N et x, et en déduire une expression de la somme $\sum_{k=0}^{N} kx^k$.

d) En déduire : $\sum_{n=s}^{d} (n - d)P(X = n) = \frac{1}{p} + s - d - 1 - \frac{(1 - p)^{d - s + 1}}{p}$

e) Montrer finalement : $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1 - p)^{d - s + 1}$

3. Optimisation

a) Simplifier $D_{s+1} - D_s$ et en déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\sigma_p = d + \frac{\ln(2)}{\ln(1 - p)}$.

b) Montrer que si $p \geq \frac{1}{2}$, D_s est minimale pour $s = d$.

4. Exemple : Il y a en moyenne 1 place sur 10 de libre, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ? On utilisera l'encadrement suivant : $2^{-1/6} < 0,9 < 2^{-1/7}$