Correction D.M. n°5

Exercice 1 – EDHEC 2017

1) On voit que $A = \frac{1}{3}(J - I)$ (ou par identification)

10) a) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J.$

Supposons que J est inversible : dans ce cas, $J^2 J^{-1} = 4JJ^{-1}$ $J = 4I_3$

Or $J \neq 4I_3$ il y a contradiction. Donc J n'est pas inversible.

b) Montrons par récurrence que : $\forall k \geq 1,\ J^k = 4^{k-1}J$:

_ pour k = 1 $4^{1-1}J = 1J = J = J^1$ vrai au rang 1

_ supposons qu'à un rang k, $J^k = 4^{k-1}J$: alors $J^{k+1} = J^kJ = 4^{k-1}J^2 = 4^{k-1}4J = 4^kJ$.

Donc $\forall k \geq 1,\ J^k = 4^{k-1}J$.

c) I commute avec toutes les matrices, donc en particulier avec J.

D'après la formule du binôme de Newton, $\forall n \geq 1$:

$$A^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (J + (-I))^n = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-I)^{n-k}J^k$$

$$= \frac{1}{3^n}\left(\binom{n}{0}(-I)^nJ^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}I^{n-k}J^k\right) = \frac{1}{3^n}\left((-1)^nI + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}I^{n-k}4^{k-1}J\right)$$

$$= \frac{1}{3^n}\left((-1)^nI + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^k\,J\right) = \frac{1}{3^n}\left((-1)^nI + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-1)^{n-k} - (-1)^n\right)J\right)$$

$$= \frac{1}{3^n}\left((-1)^nI + \frac{1}{4}((4-1)^n - (-1)^n)J\right)$$ (d'après la formule du binôme de Newton sur les réels)

$$= \frac{1}{3^n}\left((-1)^nI + \frac{1}{4}3^nJ - \frac{1}{4}(-1)^nJ\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^nI + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)J$$

d) Pour n = 0 :

$A^0 = I$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^0I + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right)J = I + 0J = I$ la formule est encore valable

e) Pour n = -1 : $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}I + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)J = -3I + \frac{1}{4}(1 - (-3))J = -3I + J$. A-t-on $A^{-1} = J - 3I$?

$A(J - 3I) = \frac{1}{3}(J - I)(J - 3I) = \frac{1}{3}(J^2 - J - 3J + 3I) = \frac{1}{3}(4J - 4J + 3I) = I$. (ou avec les coefficients)

Donc A est inversible et $A^{-1} = J - 3I$. Donc la formule est valable pour n = -1.

Exercice 2 – d'après EML 2006

1. a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nul, donc est une base de $\mathcal{F}$.

b) $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = y \end{cases}$ $\mathcal{G} = \{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul donc base de $\mathcal{G}$.

c) (u_1, u_2) ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre. $\mathrm{Dim}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$, donc ils forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Ou : $M_B(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible donc (u_1, u_2) base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2) a) $A \times 0_2 = 0_2$ et $0_2 \times D = 0_2$ donc $0_2 \in \mathcal{E}$.

si $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$. $AM = MD$ et $AM' = M'D$

Donc $A(M + M') = AM + AM' = MD + M'D = (M + M')D$ donc $M + M' \in \mathcal{E}$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ $A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MD = (\lambda M)D$ donc $\lambda M \in \mathcal{E}$.

b) Si $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\quad AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}$ $\quad MD = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$

Donc $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ t = y \\ z = 0 \\ t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ z = 0 \end{cases}$

c) Donc $\mathcal{E} = \{ \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\} = \{ x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(U, A)$.

U et A ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre, donc une base de $\mathcal{E}$.

d) $UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. UA ne vérifie pas l'équation "y = t", donc $UA \notin \mathcal{E}$.

Remarque : $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel donc est stable par addition et par multiplication par un nombre réel. Par contre, cet exemple nous montre qu'il n'est pas stable par multiplication.