Devoir à la maison n°5

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

2) a) Calculer J^2. En déduire que J n'est pas inversible.

b) Etablir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

c) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

(Indice : On trouvera : $A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)J$ *)*

d) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour n = 0.

e) L'expression est-elle valable pour n = -1 ?

Exercice 2

On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathrm{IR})$ suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) Soit $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0\}$. Déterminer un vecteur u_1 tel que u_1 est une base de $\mathcal{F}$.

b) Soit $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = X\}$.

Déterminer un vecteur u_2 tel que u_2 est une base de $\mathcal{G}$.

c) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : AM = MD.

2. a) Vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathrm{IR})$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathrm{IR})$.

Montrer que M appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si : z = 0 et y = t.

c) Etablir que (U, A) est une base de $\mathcal{E}$.

d) Calculer le produit UA. Est-ce que UA est un élément de $\mathcal{E}$?