ECG2 : Correction du D.M. n°6
d'après EML 2008

Partie I

1) $\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) \text{rang}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = 2$ car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$ la famille est libre.

Il y a 3 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ donc e_1, e_2, e_3 est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3) a) $u(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad u(e_2) = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = -e_2$.

$u(e_3) = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = e_3$ donc $M_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On remarque que $M_{\mathcal{C}}(u) = D$.

b) On a : $M_{\mathcal{B}}(u) = A \quad M_{\mathcal{C}}(u) = D$ Soit $P = P_{\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$. P est inversible car $\mathcal{C}$ est une base.

Alors d'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$.

4) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix}0^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&1^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$a_n D^2 + b_n D = a_n \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&a_n - b_n&0\\0&0&a_n + b_n\end{pmatrix}$

$D^n = a_n D^2 + b_n D \Leftrightarrow \begin{cases} a_n - b_n = (-1)^n \\ a_n + b_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n - b_n = (-1)^n \\ 2b_n = 1 - (-1)^n \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = (-1)^n + \dfrac{1-(-1)^n}{2} = \dfrac{1+(-1)^n}{2} \\ b_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2} \end{cases}$ Donc $\forall n \geq 1$, $D^n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} D^2 + \dfrac{1-(-1)^n}{2} D$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1} = P(a_n D^2 + b_n D)P^{-1} = a_nPD^2P^{-1} + b_nPDP^{-1} = a_nA^2 + b_nA$.

Ou : Comme D représente u dans la base $\mathcal{C}$, on déduit de la formule de D^n que : $u^n = a_n u^2 + b_n u$.

Comme A représente u dans la base $\mathcal{B}$, on a donc : $A^n = a_n A^2 + b_n A$.

5) $B = M_B(v)$ et $P = P_{B\longrightarrow C}$. $C = P^{-1}B\,P$ donc $B = PCP^{-1}$

D'après la formule de changement de base, C est la matrice de v dans la base $\mathcal{C}$.

$v(e_1) = Be_1 = \begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = e_1$ $\quad v(e_2) = Be_2 = \begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$v(e_3) = Be_3 = \begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = -e_3$ donc $C = M_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ est bien diagonale.

Partie II : 1. $\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 3^2 = 9$.

2. $\forall\, M \in \mathcal{E}$, $\forall\, M' \in \mathcal{E}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $f(M + M') = A(M + M') - (M + M')B = AM + AM' - MB - M'B$
$= AM - MB + AM' - M'B = f(M) + f(M')$.

$f(\lambda M) = A(\lambda M) - (\lambda M)B = \lambda AM - \lambda MB = \lambda(AM - MB) = \lambda f(M)$. Donc f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

3. a) $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$

$M \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(M) = 0 \Leftrightarrow AM = MB \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PCP^{-1} \Leftrightarrow PDNP^{-1} = PNCP^{-1}$

$\Leftrightarrow$ ($\times P^{-1}$ à gauche, $\times P$ à droite) DN = NC.

b) Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\quad NC = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ d & 0 & -f \\ g & 0 & -i \end{pmatrix}$

Donc $DN = NC \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = 0 \\ -d = d \\ -e = 0 \\ h = 0 \\ i = -i \end{cases} \Leftrightarrow a = c = d = e = h = i = 0$ donc $N = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$

c) Soit $\mathcal{F} = \{ N \in E \ / \ DN = NC \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1})$

donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

De plus, la famille $E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $E_{3,1}$ est une famille extraite de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc c'est une famille libre.

Donc $E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $E_{3,1}$ est une base de $\mathcal{F}$. $\dim(\mathcal{F}) = 3$.

4) a) $M \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow DN = NC \Leftrightarrow N = aE_{1,2} + bE_{2,3} + cE_{3,1} \Leftrightarrow M = P(aE_{1,2} + bE_{2,3} + cE_{3,1})P^{-1}$

$\Leftrightarrow M = aPE_{1,2}P^{-1} + bPE_{2,3}P^{-1} + cPE_{3,1}P^{-1}$

$\text{Ker } f = \text{Vect}(PE_{1,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1})$

De plus $aPE_{1,2}P^{-1} + bPE_{2,3}P^{-1} + cPE_{3,1}P^{-1} = 0 \Leftrightarrow P(aE_{1,2} + bE_{2,3} + cE_{3,1})P^{-1} = 0$

$\times P^{-1}$ à gauche, $\times P$ à droite $\quad aE_{1,2} + bE_{2,3} + cE_{3,1} \quad E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}$ libre donc $a = b = c = 0$.

Donc $PE_{1,2}P^{-1}$, $PE_{2,3}P^{-1}$, $PE_{3,1}P^{-1}$ est une base de Ker f. Donc dim(Ker f) = 3.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathcal{E}) - \dim(\text{Ker } f) = 9 - 3 = 6$.