ECG2 : Devoir à la maison n°6

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on appelle $\mathcal{B}$ la base canonique.

On considère les endomorphismes u et v, dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement A et B.

On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.
2. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. a) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.

b) En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, telle que $A = P D P^{-1}$.

4. a. Trouver deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = a_n D^2 + b_n D$.

b. En déduire une expression de A^n comme combinaison linéaire de A^2 et de A.

5. On pose $C = P^{-1}B P$. Sans calculer P^{-1}, vérifier que C est une matrice diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application f : $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$:

1. Donner la dimension de $\mathcal{E}$.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
3. Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $N = P^{-1}M P$

a) Montrer : $M \in \ker(f) \Leftrightarrow DN = NC$:

b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.

c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

4. En déduire la dimension de Ker(f), puis la dimension de Im (f).