

Exercice 1 – EDHEC 2020

1) $1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)}$ sont continues sur $[0;1]$ comme quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc les intégrales I_n et J_n sont bien définies.

$$2) I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[\ln(|x+1|) \right]_0^1 - I_0 = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

(on pouvait également faire un changement de variable, ou une intégration par parties)

$$3) a) \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 1)}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$b) \text{ Avec } n = 0, \text{ on obtient } I_2 + 2I_1 + I_0 = 1 \quad \text{donc } I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - 2\ln(2) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

$$c) \text{ De manière générale, on a : } I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n - 2I_{n+1}$$

C'est une suite récurrente à deux rangs, il faut utiliser une variable auxiliaire.

$$\text{Attention, pour tout } k \in \mathbb{N} \quad I_k = \frac{1}{k-1} - I_{k-2} - 2I_{k-1}$$

for k in range(2,n+1):

aux = a

a=b

b=1/(k-1)-2*b-aux

$$4) a) \forall x \in [0;1] \quad \frac{x^n}{(1+x)^2} \geq 0 \text{ donc par positivité de l'intégrale : } I_n \geq 0$$

(les bornes sont dans le bon sens, et y resteront)

$$\forall x \in [0;1] \quad 1+x \geq 1 \quad (1+x)^2 \geq 1 \quad \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1 \quad (x^n \geq 0 \text{ donc}) \quad \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n.$$

$$\text{Par croissance de l'intégrale } I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \quad \text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc d'après le théorème d'encadrement, la suite } (I_n) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

$$5) \text{ Intégration par parties : } \begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v(x) = -\frac{1}{1+x} \end{cases} \quad (u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [0;1])$$

$$(n \geq 1 \text{ donc } n-1 \geq 0) \quad I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + 0 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}.$$

$$6) a) \text{ d'après la question 5, } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \text{ donc } J_n = \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

$$b) \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \text{ donc } (n+1)J_n = I_{n+1} + \frac{1}{2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2} \quad (n+1)J_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2} \text{ donc } J_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 2 – EML 2017

Partie I : Simulation informatique

La probabilité de tirer une boule rouge est : $\frac{r}{r+b}$

if $x < r/(r+b)$:

$r = r + 1; s = s + 1$ #On ajoute une boule rouge

else :

$b = b + 1$ #On ajoute une boule blanche

Partie II : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

1. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, X_k est le nombre de boules rouges tirées au k -ème tirage.

Donc $S_n = \text{nb de boules rouges tirées en tout} = \sum_{k=1}^n X_k$.

2. $P(X_1 = 1) = P(R_1) = 2/3$ donc $X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(2/3)$ et $E(X_1) = 2/3$ $V(X_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

3. (a) $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

De même $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6}$

(b) On cherche la loi marginale de X_2 :

$P(X_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) = \frac{1}{3}$ $P(X_2 = 1) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$. Donc $X_2 \longrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

$X_1 \setminus X_2$	0	1	$P(X_1 = i)$
0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	3/6	2/3
$P(X_2 = j)$	1/3	2/3	

(c) $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1}{2} \neq \frac{4}{9}$. Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(d) X_2 suit la même loi que X_1 donc admet la même espérance et la même variance.

$E(X_1 X_2) = 0 + 1 \times 1 \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$.

$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)} = \frac{1/18}{2/9} = \frac{1}{18} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{4} > 0$: "Quand X_1 vaut 1, X_2 a plus tendance à être égal à 1".

C'est cohérent, puisque si $X_1 = 1$, on ajoute une boule rouge, donc la probabilité de tirer une boule rouge augmente.

(e) $S_2 = X_1 + X_2$ donc $E(S_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$V(S_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\text{cov}(X_1, X_2) = \frac{2}{9} \times 2 + 2 \times \frac{1}{18} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

4. $P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$

$= P(R_1)P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}}(R_k)P_{R_1 \cap \dots \cap R_k}(B_{k+1}) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{1+k}{2+k} \times \frac{1}{3+k} \times \frac{2}{4+k} \times \dots \times \frac{n-k}{n+2} = \frac{2 \times (1 \times 2 \times \dots \times (1+k)) \times (1 \times 2 \times \dots \times (n-k))}{1 \times 2 \times \dots \times (n+2)}$

$= \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$

Au k -ème tirage : on a $3 + (k-1) = k+2$ boules en tout, et $2 + (k-1) = k+1$ rouges

Au $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage : on a $k + 3$ boules en tout, et une bleue

Au $n^{\text{ème}}$ tirage, on a $3 + (n - 1) = n + 2$ boules en tout, et $1 + (n - k - 1) = n - k$ boules bleues.

(b) $(S_n = k) = \text{"on tire } k \text{ boules et } n - k \text{ bleues"}$

Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de choisir la place des k boules rouges tirées. Chacun de ces événements a la même probabilité : en effet, quel que soit l'ordre, on a : Au numérateur : $2 \times 3 \times \dots \times (k + 1)$ et $1 \times 2 \times \dots \times (n - k)$
Au dénominateur : $3 \times 4 \times \dots \times (n + 2)$. Donc :

$$P([S_n = k]) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n) \\ = \binom{n}{k} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2n! (k+1)! (n-k)!}{k! (n-k)! (n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+2)(n+1)}$$

5. $S_n(\Omega) = [[0; n]]$ est fini donc S_n admet une espérance et

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^n k.P(S_n = k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (k^2 + k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ = \frac{2n}{n+2} \left(\frac{2n+1}{6} + \frac{3}{6} \right) = \frac{2n(n+2)}{3(n+2)} = \frac{2n}{3}.$$

10. (a) Si $(S_n = k)$: on a tiré k boules rouges et $n - k$ boules bleues : il y a donc $k + 2$ boules rouges, $n - k + 1$ boules bleues, et $n + 3$ boules en tout. Donc $P_{(S_n = k)}(X_{n+1} = 1) = \frac{k+2}{n+3}$.

(b) La famille $(S_n = k)_{k \in [[0; n]]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités

$$\text{totales, on a : (loi marginale) } P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) P_{(S_n = k)}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \frac{k+2}{n+3} \\ = \frac{1}{n+3} \sum_{k=0}^n k.P(S_n = k) + \frac{2}{n+3} \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \frac{1}{n+3} E(S_n) + \frac{2}{n+3} \times 1 = \frac{E(S_n) + 2}{n+3}$$

$$= \frac{\frac{2n}{3} + 2}{n+3} = \frac{\frac{2n+6}{3}}{n+3} = \frac{2}{3}. \text{ Donc } X_{n+1} \longrightarrow \mathcal{B}(2/3) \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Donc } X_n \longrightarrow \mathcal{B}(2/3) \forall n \geq 2.$$

Comme X_1 suit aussi cette loi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \longrightarrow \mathcal{B}(2/3)$.

Autre méthode : X_{n+1} suit une loi de Bernoulli.

$$\text{Or } X_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ donc } E(X_{n+1}) = E(S_{n+1}) - E(S_n) = \frac{2(n+1)}{3} - \frac{2n}{3} = \frac{2}{3}. \text{ Donc le paramètre de la loi est } \frac{2}{3}.$$