Devoir à la maison n°7

Exercice 1

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input ('donnez une valeur pour n : '))
a=1/2
b=np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a=…
    b=…
print(b)
```

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n.J_{n-1} - \frac{1}{2}$.

6. a) Utiliser les questions 4. et 5. pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

b) Utiliser la question 5. pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$,

lorsque n est au voisinage de + ∞.

Exercice 2

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"

R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
import numpy.random as rd

def DM6(n):
   b=1   # b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
   r=2   # r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
   s=0   # s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
   for k in range(1,n+1):
      x=rd.rand()
      if …     :
         …
      else:
          …
   return(s)
```

Partie II : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

La question 4. est hors barème, on pourra admettre le résultat.

1. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

(b) En déduire la loi de X_2.

(c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

(d) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_1, X_2).
Son signe est-il cohérent ?

(e) Déterminer l'espérance et la variance de S_2.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[0; n]]$.

(a) Calculer $P(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

(b) Justifier : $P([S_n = k]) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

puis en déduire : $P([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer : $\forall\, k \in [[0; n]],\ P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

(b) En déduire : $P([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{E(S_n) + 2}{n+3}$.

(c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?