

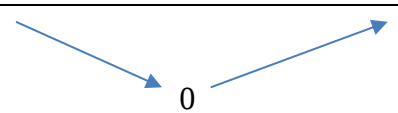
Devoir à la maison n°8 – Correction
Sujet librement inspiré d'Ecricome 2021

1. a) Pour $x \in]0 ; +\infty[$, posons $g_n(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^n}$. On a donc $f_n(x) = \int_1^x g_n(t)dt$

g_n est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc d'après la propriété du cours, f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$$\forall x > 0, f_n'(x) = g_n(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^n}.$$

b) $\forall x > 0, 1+x^n > 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $\ln(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	–	0	+
$f_n(x)$			

$$\text{De plus, } f_n(1) = \int_1^1 g_n(t)dt = 0$$

2. a) $\frac{t^{3/2}\ln(t)}{1+t^n} \sim_{+\infty} \frac{t^{3/2}\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}$ $n - \frac{3}{2} > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}} = 0$ par croissances comparées.

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{3/2}\ln(t)}{1+t^n} = 0.$$

b) Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(t)}{1+t^n}}{\frac{1}{t^{3/2}}} = 0$ $\frac{\ln(t)}{1+t^n} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$. Les fonctions sont continues et positives sur $[1; +\infty[$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge ($3/2 > 1$), donc l'intégrale K_n est convergente.

c) Par définition, cela signifie que $\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Donc $f_n(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et sa limite vaut K_n .

3. a) On sait que $\forall x \geq 1, \ln(x) \geq 0$.

De plus la fonction $\ln$ est concave donc est en-dessous de sa tangente en 1.

$$\text{Donc } \forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1 \leq x. \quad \text{Donc } \forall x \geq 1, 0 \leq \ln(x) \leq x.$$

$$\text{De plus } \forall x \geq 1, 1+x^n \geq x^n (> 0) \quad \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \quad (\text{la fonction inverse est décroissante sur }]0 ; +\infty[)$$

Les expressions étant toutes positives, on peut multiplier les inégalités : $0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{x^n} \left(= \frac{1}{x^{n-1}} \right)$

b) Soit $X \geq 1$. $\forall x \in [1; X], 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$ donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_1^X \frac{\ln(x)}{1+x^n} dx \leq \int_1^X \frac{1}{x^{n-1}} dx$$

$$n-1 \geq 2 > 1 \text{ donc } \int_1^X \frac{1}{x^{n-1}} dx \text{ est convergente.}$$

En passant à la limite quand X tend vers $+\infty$, on obtient :

$$0 \leq K_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx$$

$$\text{Or } \int_1^X \frac{1}{x^{n-1}} dx = \int_1^X x^{-n+1} dx = \left[\frac{1}{-n+2} x^{-n+2} \right]_1^X = \left[\frac{1}{(2-n)x^{n-2}} \right]_1^X = \frac{1}{(2-n)X^{n-2}} - \frac{1}{2-n} = \frac{1}{(2-n)X^{n-2}} + \frac{1}{n-2}$$

$$n \geq 3 \text{ donc } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-n)X^{n-2}} + \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-2} \quad \text{donc } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx = \frac{1}{n-2} \quad \text{Donc } \forall n \geq 3, 0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-2} = 0$ donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$.

4. Soit $X \leq 0$. On pose $I_n(X) = \int_X^0 \frac{u}{1 + e^{-nu}} \cdot e^{-u} du$

$$u = -\ln(t) \Leftrightarrow \ln(t) = -u \Leftrightarrow t = e^{-u}$$

Le changement de variable est bijectif et de classe C^1 .

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \quad "du = -\frac{1}{t} dt \gg \quad \text{Bornes : } u = X \Leftrightarrow t = e^{-X} \quad u = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Donc } I_n(X) = \int_{t=e^{-X}}^{t=1} \frac{-\ln(t)}{1 + t^n} \left(-\frac{1}{t} dt\right) = \int_{t=e^{-X}}^{t=1} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt = - \int_{t=1}^{t=e^{-X}} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^{-X} = +\infty \text{ donc } \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_{t=1}^{t=e^{-X}} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt = K_n$$

Donc $\int_{-\infty}^0 \frac{u}{1 + e^{-nu}} \cdot e^{-u} du$ converge et vaut $-K_n$.