Devoir à la maison n°8

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et pour $x \in]0 ; +\infty[$, on pose, $f_n(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$.

On pose également, si cette intégrale converge : $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$

1. a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

b) En déduire les variations de f_n sur $]0 ; +\infty[$.

2. a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .

c) Que peut-on en déduire pour la fonction f_n ?

3. a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leq \ln(x) \leq x$.

En déduire que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier $n \geq 3$:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.

4. A l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{u}{1+e^{-nu}} \cdot e^{-u} du$ est convergente

et exprimer la valeur de $\int_{-\infty}^0 \frac{u}{1+e^{-nu}} \cdot e^{-u} du$ en fonction de K_n .