D.M. n°9 – Correction – D'après Ecricome 2015

1. g est continue sur $]-\infty;0[$ car fonction nulle et sur $]0;+\infty[$ car produit de fonctions continues.
En 0 : $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x.e^{-\lambda x} = 0$ donc g est continue en 0. Donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) On a vu que g est continue sur $\mathbb{R}$.
g est positive sur $]-\infty;0[$ (fonction nulle) et sur $[0;+\infty[$ (produit de fonctions positives).
g est à support sur $[0;+\infty[$. $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx$.

Soit $X \geq 0$. On pose $I(X) = \int_0^X \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx$.

Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda^2 e^{-\lambda x}\end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\lambda\, e^{-\lambda x}\end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$I(X) = \left[-\lambda\, x.\, e^{-\lambda x}\right]_0^X + \int_0^X \lambda e^{-\lambda x}dx = -\lambda X e^{-\lambda X} + \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^X = -\lambda X e^{-\lambda X} - e^{-\lambda X} + 1$

$\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-\lambda X} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-\lambda X} = 0$ donc $\int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx$ converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1. Donc g est une densité de probabilité.

b) La fonction de répartition G est de classe C^1 sur chaque intervalle sur lequel la densité g est continue.
Donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$.

_ si $x < 0$, $G(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

_ si $x \geq 0$, $G(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t}dt = \int_0^x te^{-t}dt = -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}(1+\lambda x)$.

d) $x \longmapsto xg(x)$ est à support sur $[0;+\infty[$.
Pour $X \geq 0$, on note $J(X) = \int_0^X x.g(x)dx = \int_0^X \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}dx$.

Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \lambda^2 e^{-\lambda x}\end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\lambda\, e^{-\lambda x}\end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$J(X) = \left[-\lambda\, x^2.\, e^{-\lambda x}\right]_0^X + \int_0^X 2x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\lambda X^2 e^{-\lambda X} + \dfrac{2}{\lambda}\int_0^X \lambda^2.x.e^{-\lambda x}dx = -\lambda X^2 e^{-\lambda X} + \dfrac{2}{\lambda} I(X)$

$\lim\limits_{X\to+\infty} X^2 e^{-\lambda X} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{X\to+\infty} I(X) = 1$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} J(X) = \dfrac{2}{\lambda}$.

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x.g(x)dx$ converge absolument et vaut $\dfrac{2}{\lambda}$.

Donc Y admet une espérance et $E(X) = \dfrac{2}{\lambda}$.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(e^{\lambda Y} \leq x)$
_ si $x \leq 0$, pas de solutions : $H(x) = 0$.
_ si $x > 0$, $H(x) = P\big(\lambda Y \leq \ln(x)\big) = P\left(Y \leq \dfrac{\ln(x)}{\lambda}\right)$ (car $\lambda > 0$) $= F_Y\left(\dfrac{\ln(x)}{\lambda}\right)$. $\dfrac{\ln(x)}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

_ si $0 < x < 1$ $\dfrac{\ln(x)}{\lambda} < 0$ $H(x) = F_Y\left(\dfrac{\ln(x)}{\lambda}\right) = 0$

_ si $x \geq 1$ $\dfrac{\ln(x)}{\lambda} \geq 0$ $H(x) = 1 - e^{-\lambda.\ln(x)/\lambda}\left(1 + \dfrac{\lambda.\ln(x)}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln(x)}(1+\ln(x)) = 1 - \dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

Donc $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1+\ln(x)}{x} \text{ si } x \geq 1\end{cases}$

b) H est continue et de classe C^1 sur $]-\infty;1[$ (fonction nulle) et sur $]1;+\infty[$ (différence de fonctions de classe C^1).

De plus $\lim\limits_{x \to 1} 1 - \dfrac{1 + \ln(x)}{x} = 1 - 1 = 0 \quad \lim\limits_{x \to 1} 0 = 0$ donc H est continue en 1.

H est une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1, donc Z est une variable à densité

$$H'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ -\dfrac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x))}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x^2} \text{ si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{Une densité de Z est : } f_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}.$$

c) $\forall X \geq 1$, $\int_1^X x.f_Z(x)dx = \int_1^X \dfrac{\ln(x)}{x}dx = \left[\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^X = \dfrac{1}{2}\ln(X)^2 \quad \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{2}\ln(X)^2 = +\infty$, donc l'intégrale diverge. Donc Z n'admet pas d'espérance.

Ou : Avec le théorème de transfert : $\int_1^{+\infty} e^{\lambda x}g(x)dx = \int_1^{+\infty} \lambda^2 x.dx$ diverge. Donc $Z = e^{\lambda Y}$ n'admet pas d'espérance.