ECG2 - Devoir à la maison n°9

Soit λ un réel strictement positif.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda^2.x.e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.

On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.

b) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que pour tout réel x, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

d) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.

3. On considère la variable aléatoire $Z = \exp(\lambda Y)$.

a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

ECG2 - Devoir à la maison n°9

Soit λ un réel strictement positif.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda^2.x.e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.

On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.

b) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que pour tout réel x, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

d) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.

3. On considère la variable aléatoire $Z = \exp(\lambda Y)$.

a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?