ECG2 : Devoir Surveillé n°1
Jeudi 07 Septembre 2023

Nom : Prénom :

Partie I

Qu 1 : Soit (S) un système linéaire triangulaire. A quelle(s) condition(s) S est-il un système de Cramer ?

(S) est un système de Cramer si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Qu 2 : Soit A et B $\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$*. Formule du binôme de Newton, avec les conditions :*

si A et B commutent (AB = BA) alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Qu 3 : Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$*. F est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *si :*
_ $0 \in F$ **(ou** $F \neq \emptyset$**)**
_ $\forall X \in F, \forall X' \in F, X + X' \in F$
_ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in F, \lambda X \in F$.

Qu 4 : Soit $X_1, \ldots, X_p$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ $(p \geq 2)$.

_ *(X_1) forme une famille libre si :* **X_1 est non nul**
_ *(X_1, X_2) forment une famille libre si :* **X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires**
_ *($X_1, \ldots, X_p$) forment une famille libre si :*
$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_p X_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$

Qu 5 : Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}^p$*.*
Alors (définition) :

Ker f = $\{ x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}$ **(ensemble des antécédents de 0)**

Qu 6 : Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}^p$*.*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* $\mathbb{R}^n$*. Alors :*

Im f = $\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$

Qu 7 : Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}^p$*, de noyau Ker(f) et d'image Im(f).*
Alors f injective $\Leftrightarrow$ **Ker f = {0}**
f surjective $\Leftrightarrow$ **Im f =** $\mathbb{R}^p$.

Qu 8 : Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ *dans lui-même. Soit A* $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sa matrice associée.*
f est bijective si et seulement si :
_ *la matrice A est* **inversible**
_ *le système AX = B (B* $\in M_{n,1}(\mathbb{R})$*)* **est de Cramer**

Partie II

Qu 9 : Compléter le tableau suivant :

Loi	*X(Ω)*	*P(X = k)*	*E(X)*	*V(X)*	*Cas d'application*
Bernoulli B(p)	**{0,1}**	**P(X=0) = 1 – p** **P(X = 1) = p**	**p**	**p(1 – p)**	**succès de proba p** **X = 1 si succès, 0 si échec**
Uniforme U({1, …, n})	**{1, …, n}**	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	**Equiprobabilité**
Poisson P(λ)	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	
Binomiale B(n,p)	**{0, …, n}**	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	**np**	**np(1 – p)**	**succès de proba p** **n épreuves indép.** **X = nb succès**
Géométrique G(p)	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	**succès de proba p** **épreuves indép.** **X = rang du 1^er^ succès**

Qu 10 : Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ p événements dans un univers Ω.
$(A_1, \ldots, A_p)$ forment un système complet d'événements si :

_ les $(A_i)_{1 \le i \le p}$ sont deux à deux disjoints ($\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$)
_ $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega$

Qu 11 : Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Formule des probabilités composées :

si $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$

Qu 12 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit g une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit Y = g(X). A quelle condition E(Y) existe-t-elle ? Quelle est alors sa valeur ?

Si la série $\sum g(i)P(X = i)$ est absolument convergente, alors Y admet une espérance et

$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)P(X = i)$ (théorème de transfert)

Qu 13 : Soit X une V.A.R. discrète qui admet une espérance et une variance. Soit a et b $\in \mathbb{R}$.
Espérance et variance de Y = aX + b ?

$E(Y) = aE(X) + b$ $V(Y) = a^2V(X)$

Qu 14 : Soit X une V.A.R. discrète, qui admet une espérance et une variance. Formule de Huygens ?

$\mathbf{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

Partie III

Qu 15 : Compléter (sans justification) :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \mathbf{1}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1 + x)}{x} = \mathbf{1}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(1 + x)}{x} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \mathbf{0}$

Qu 16 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a $\in$ I.

f est continue en a si : $\mathbf{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$

f est dérivable en a si : $\mathbf{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ **a une limite finie quand x tend vers a.**

Qu 17 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Enoncer le théorème de la bijection (version application réciproque).

Si f est continue et strictement monotone sur I, alors elle réalise une bijection de I sur f(I) et admet une application réciproque de f(I) sur I.

Propriétés de l'application réciproque ? (continuité, variations, courbe)

Dans ce cas, f^{-1} est continue et strictement monotone sur f(I), de même sens de variation que f.
Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

Qu 18 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle [a;b] (a $\leq$ b).
Enoncé l'inégalité des accroissements finis (version sans valeurs absolues)

S'il existe deux réels m et M tels que $\forall$ x $\in$ [a,b], m $\leq$ f '(x) $\leq$ M, alors
m(b – a) $\leq$ f(b) – f(a) $\leq$ M(b – a)

Qu 19 : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite.
$(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique si : **il existe un réel r tel que $\forall$ n $\geq$ 1, $u_{n+1} = u_n + r$**

Dans ce cas : $\forall n \geq 1$, $\mathbf{u_n = u_1 + (n - 1)r}$

Qu 20 : Soit n $\in \mathbb{N}$ et q $\in \mathbb{R}$. Compléter :

$\sum\limits_{k=0}^{n} k = \mathbf{\dfrac{n(n + 1)}{2}}$ $\quad$ $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \mathbf{\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \textbf{ si } \mathbf{q \neq 1} \\ \mathbf{n + 1} \textbf{ si } \mathbf{q = 1} \end{cases}$

Qu 21 : Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si : **$-1 < q < 1$**

Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \mathbf{\dfrac{2}{(1-q)^3}}$

Qu 22 : Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in$ **$\mathbb{R}$**

Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathbf{e^x}$

Qu 23 : Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle I, qui ne s'annule pas.
Donner une primitive de :

a) u'.u : $\mathbf{\dfrac{u^2}{2}}$ *b)* $\dfrac{u'}{u}$ *:* $\mathbf{\ln(|u|)}$ *c)* $\dfrac{u'}{u^2}$ *:* $\mathbf{-\dfrac{1}{u}}$

Qu 24 : Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et a, b $\in$ I. Formule d'intégration par parties (avec les hypothèses) :

Si u et v sont de classe C^1 sur I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Qu 25 : Soit a et b deux réels.
Quelles sont les solutions de l'équation différentielle y'' + ay' + by = 0 ?

On appelle équation caractéristique l'équation : $r^2 + ar + b = 0$
_ si $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.
Il existe alors deux réels λ et μ tels que : $y = \lambda.\exp(r_1t) + \mu.\exp(r_2t)$
_ si $\Delta = 0$: l'équation admet une solution double r_0.
Il existe alors deux réels λ et μ tels que : $y = (\lambda t + \mu)\exp(r_0t)$.