ECG2 : Correction D.S. n°2

Exercice 1

1. Sur $]-\infty;1[$, φ est continue comme somme, produit et composée de fonctions continues. ($1 - x > 0$ donc $\ln(1 - x)$ est bien défini)

$\lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} y.\ln(y) = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x)\ln(1 - x) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 1 = \varphi(1)$ donc φ est continue en 1.

Donc φ est continue sur $]-\infty;1]$.

2. a) Sur $]-\infty;1[$, φ est de classe C^1 comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^1.

$\forall x < 1$, $\varphi'(x) = 1 + (-1)\ln(1 - x) + (1 - x) \times \dfrac{-1}{1 - x} = 1 - \ln(1 - x) - 1 = -\ln(1 - x)$

b) $-\ln(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	|
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1

c) $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \dfrac{x + (1 - x)\ln(1 - x) - 1}{x - 1} = \dfrac{(x - 1) + (1 - x)\ln(1 - x)}{x - 1} = 1 - \ln(1 - x)$

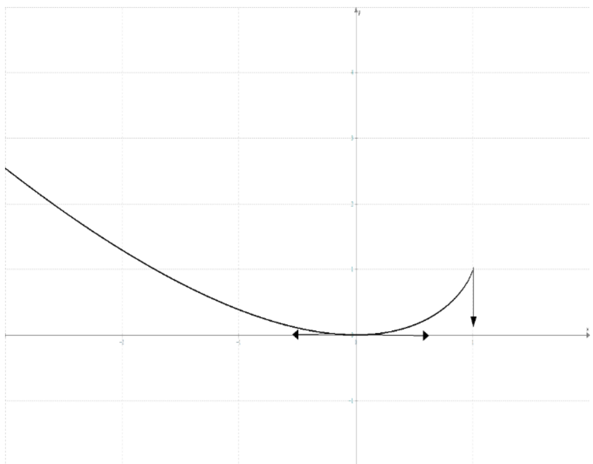
$\lim\limits_{x \to 1} 1 - \ln(1 - x) = +\infty$ donc φ n'est pas dérivable en 1. (la courbe de φ admet une tangente verticale).

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$ Posons $X = 1 - x$ ($\Leftrightarrow x = 1 - X$)

$\forall x < 1$, $\varphi(x) = 1 - X + X.\ln(X) = 1 + X(-1 + \ln(X))$

donc $\lim\limits_{X \to +\infty} 1 - X + X.\ln(X) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$



4. Petit plus : φ est de classe C^2 sur $]-\infty;1[$ et

$\forall x < 1$, $\varphi''(x) = -\dfrac{-1}{1 - x} = \dfrac{1}{1 - x} > 0$ car $1 - x > 0$.

Donc φ est convexe sur $]-\infty;1[$.

Exercice 2

Partie I : Etude d'une fonction

1. φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ ℝ et $\forall x \in [0; +\infty[$,

$\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x + 2)e^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ $\varphi(0) = -1$

$\varphi(-2) = 4e^{-2} - 1$

x	0		$+\infty$
$x(x + 2)$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	↗	$+\infty$

2. φ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$.
Elle admet donc une application réciproque g définie sur $[-1; +\infty[$.

3. sur $]0; +\infty[$, $e^x = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2e^x = 1 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$.

D'après la question précédente, et comme $0 \in]-1; +\infty[$, l'équation $\varphi(x) = 0$ ($\Leftrightarrow e^x = 1/x^2$) admet une solution et une seule sur $]0; +\infty[$ qu'on notera α.

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{e} - 4}{4}$ or $e < 4$ donc $\sqrt{e} < 2$ donc $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. $\varphi(1) = e - 1 > 0$ donc $\varphi(1) > 0$

$\varphi(\alpha) = 0$ donc $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(1)$. Or φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Par récurrence : _ $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 1$

_ supposons qu'à un rang n, $u_n \geq 1$:

alors $u_n^3 \geq 1$ et $e^{u_n} \geq e$ donc par produit d'inégalités de nombres positifs, $u_n^3 e^{u_n} \geq e \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.

Ou : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = (x^3 + 3x^2)e^x$

Donc $f'(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$

$u_n \geq 1$ et f croissante sur $[1; +\infty[$ donc $f(u_n) \geq f(1)$ $u_{n+1} \geq e \geq 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^3 e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2 e^{u_n} - 1)$

Or $u_n \geq 1$ donc $u_n^2 \geq 1$ et $e^{u_n} \geq e$ donc $u_n^2 e^{u_n} \geq e \geq 1$ $u_n^2 e^{u_n} - 1 \geq 0$ et $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

donc (u_n) est croissante.

Ou : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$:

_ $u_0 = 1$ $u_1 = f(u_0) = f(1) = e$ donc $u_1 \geq u_0$

_ supposons qu'à un rang n, $u_{n+1} \geq u_n$:

alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ (f croissance sur $[1; +\infty[$)

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

5. Si (u_n) converge vers un réel L, alors d'après le théorème du point fixe,

$L = L^3e^L \Leftrightarrow L(L^2e^L - 1) = 0 \Leftrightarrow L = 0$ ou $L^2e^L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = 0$ ou $L = \alpha$ (d'après la question 3)

Or $u_n \geq 1$ donc $L \geq 1$. Donc $L = 0$ et $L = \alpha$ sont impossibles.

Donc (u_n) ne converge pas. Comme (u_n) est croissante, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

1. h_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ (le dénominateur ne s'annule pas) et

$\forall x > 0$, $h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = \frac{nx^{2n} - n}{x^{n+1}} = \frac{n(x^{2n} - 1)}{x^{n+1}}$.

Dérivée de $\frac{1}{x^n}$: $\frac{1}{x^n} = x^{-n} \longrightarrow -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ *ou* $\frac{1}{v} \longrightarrow -\frac{v'}{v^2}$ *donc* $-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $n > 0$ et $x^{n+1} > 0$ de plus $x^{2n} - 1 > 0 \Leftrightarrow x^{2n} > 1 \Leftrightarrow x > 1$.

x	0		1		$+\infty$
$h_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} h_n(x) = +\infty$,

$h_n(1) = 3$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x) = +\infty$.

La fonction h_n est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$ et $4 \in]3; +\infty[$, donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution u_n sur $]0;1[$.

De même, l'équation admet une unique solution v_n sur $]1;+\infty[$.

3. a) $\forall x > 0$, $\forall n > 0$, $h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} - x^n + \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^n}$

$= \frac{x^{2n+2} - x^{2x+1} + 1 - x}{x^{n+1}} = \frac{x^{2n+1}(x - 1) - (x - 1)}{x^{n+1}} = \frac{(x - 1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq 1$ donc $v_n - 1 \geq 0$ $\quad v_n^{2n+1} \geq 1$ donc $v_n^{2n+1} - 1 \geq 0$ et $v_n^{n+1} \geq 1$

Donc $h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) \geq 0$ $\quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$

c) Or $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$ donc $h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$.

h_{n+1} est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc $v_n \geq v_{n+1}$. La suite (v_n) est décroissante.

4. a) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel $L \geq 1$.

b) $v_n^n = \exp(n.\ln(v_n))$ si $L > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(v_n) = \ln(L) > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n.\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.

Or $h_n(v_n) = 4$ $\quad v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = 4$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{v_n^n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = +\infty$. Il y a contradiction.

c) On sait que $L \geq 1$. Or $L > 1$ est impossible. Donc $L = 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

5) $h_n(3) = 3^n + 1 + \dfrac{1}{3^n}$ $\quad 3^n \geq 3$ (car $n \geq 1$) et $\dfrac{1}{3^n} \geq 0$ donc $h_n(3) \geq 4$ $\quad h_n(3) \geq h_n(v_n)$.

Comme h_n est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, $3 \geq v_n$.

6) a) $h_n(v_n) = 4$ donc $v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = 4$ Posons $X = v_n^n$ $\quad X + 1 + \dfrac{1}{X} = 4 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 1 = 0$

$\Delta = 5$ $\quad X_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad X_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. $\quad \sqrt{5} > 2$ donc $3 - \sqrt{5} < 1$ $\quad X_2 < \dfrac{1}{2}$

Or $v_n \geq 1$ donc $v_n^n \geq 1$ donc $v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b) Donc $v_n = (v_n^n)^{1/n} = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/n} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Exercice 4

1) a) Soit $k \geq 1$. On considère la fonction $f(t) = \ln(t)$ sur l'intervalle $[k; k+1]$

f est dérivable sur $[k, k+1]$ et $\forall t \in [k, k+1]$, $f'(t) = \dfrac{1}{t}$.

$\forall t \in [k, k+1]$, $k \leq t \leq k+1$ $\quad \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$ $\quad \dfrac{1}{k+1} \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{k}$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $\dfrac{1}{k+1}(k+1-k) \leq f(k+1) - f(k) \leq \dfrac{1}{k}(k+1-k)$

$\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

b) On a donc $\forall n \geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ $\quad \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n$ (sommes télescopiques)

De même, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$ $\quad (k' = k+1)$ $\quad \sum\limits_{k'=2}^{n} \dfrac{1}{k'} \leq \ln(n) - \ln(1)$ $\quad H_n - 1 \leq \ln(n)$

Donc $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

c) Donc $\forall\, n \geq 2$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \dfrac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$ $\quad (\ln(n) > 0)$

$\forall\, n \geq 2$, $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} = 1$ donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$ donc $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

2) a) $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

D'après la question 1.a) $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

b) D'après la question 1. b), $\ln(n+1) - \ln(n) \leq H_n - \ln(n) \leq 1$

Or $n + 1 \geq n$ donc $\ln(n+1) \geq \ln(n)$ $\quad 0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n \leq 1$.

(u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel γ.

Comme $u_n \in [0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\gamma \in [0;1]$.

Exercice 5 1) $\forall n \geq 1$, $p_n = \frac{n.p_n}{n}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} n.p_n = \lambda$ et $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1 - p_n)^n = e^{n.\ln(1 - p_n)}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} p_n = 0$ donc $\ln(1 - p_n) \sim_{+\infty} -p_n$ donc $n.\ln(1 - p_n) \sim_{+\infty} -n.p_n$
donc $\lim_{n \to +\infty} n.\ln(1 - p_n) = -\lambda$

Par continuité de la fonction exp : $\lim_{n \to +\infty} (1 - p_n)^n = e^{-\lambda}$.