ECG2 : Devoir Surveillé n°2
Mercredi 27 Septembre 2023
3 heures

Exercice 1 – EML 2021
On considère la fonction φ définie sur $]-\infty;1]$ par :
$\forall x \in]-\infty; 1], \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x).\ln(1-x) \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$
1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty; 1]$.
2. a) Justifier que φ est de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$ et calculer, pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $\varphi'(x)$.
b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty; 1]$.
c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

Exercice 2 - EML 2015
Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Etude d'une fonction
On considère l'application $\varphi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2e^x - 1$.
1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que φ admet une application réciproque g, dont on précisera l'ensemble de définition.
3. Etablir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α et que α appartient à l'intervalle $]1/2, 1[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3e^x$, et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
5. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Exercice 3 – Ecricome 2019

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. a) Démontrer que :

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \dfrac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel L et montrer que $L \geq 1$.

b) En supposant que $L > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

5. Montrer que : $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$.

6. a) Montrer que : $\forall n \geq 1, (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b) Retrouver ainsi le résultat de la question 4. c)

Exercice 4

1) On introduit la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

b) En déduire que $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c) Montrer que $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$

2) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$.

a) Etudier le sens de variation de (u_n).

b) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel γ, et que $\gamma \in [0;1]$.

Exercice 5 – D'après ESSEC 2013

Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs et inférieurs à 1.

On supposer que $n.p_n$ admet une limite finie strictement positive et on pose $\lim\limits_{n \to +\infty} n.p_n = \lambda$.

1) Que peut-on déduire de la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

2) Etudier la limite de $(1 - p_n)^n$ quand n tend vers $+\infty$.