D.S. n°4 : Correction

Exercice 1

1) $g(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3+4+6}{12} = \frac{13}{12}$ $\quad g(\alpha) = 1 \quad g(5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{12+15+20}{60} = \frac{47}{60}$.

On a donc $g(5) < g(\alpha) < g(4)$. Comme g est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$, on a donc : $4 < \alpha < 5$.

```
def valeur_approchee():
   x=4
   y = 5
   while y-x>10**-3:
       m = (x + y) / 2
       if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) > 1:
           x=m      #Car g est décroissante
       else:
           y=m
   alpha=(x+y)/2
   return(alpha)
```

On trouve : $\alpha \approx 4{,}2143555$

Exercice 2

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $A.X = \lambda.X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 3x + 6y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 3x + (6-\lambda)y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + (6-\lambda)y = 0 \\ (1-\lambda)x + 2y = 0 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + (6-\lambda)y = 0 \\ \quad (\lambda^2 - 7\lambda)y = 0 \quad L_2 \leftarrow (1-\lambda)L_1 - 3L_2 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer lorsque $\lambda(\lambda - 7) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 7$

_ pour $\lambda = 0$: $3x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$. Donc $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Le vecteur est non nul, donc forme une base de $\mathcal{S}_0$.

_ pour $\lambda = 7$: $3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x$ donc $\mathcal{S}_7 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. de même $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathcal{S}_7$.

2) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\forall M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda f(M) + f(M')$.

Donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) a) Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Alors $f(M) = AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 6z & 3y + 6t \end{pmatrix}$

Donc $f(M) = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \\ 3x + 6z = 0 \\ 3y + 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -2t \end{cases}$ donc $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une base de Ker(f).

Donc Ker(f) est de dimension 2.

b) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.

c) $f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de Im(f).

Comme dim(Im(f)) = 2, c'est une base. (On peut aussi utiliser $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2}))$)

4) $f(0_2) = 0_2$ et $7.0_2 = 0_2$ donc $0_2 \in \mathcal{E}$.

$\forall M \in \mathcal{E}, \forall M' \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$f(M + M') = f(M) + f(M') = 7M + 7M' = 7(M + M')$ donc $M + M' \in \mathcal{E}$.

$f(\lambda M) = \lambda.f(M) = \lambda(7M) = 7(\lambda M)$ donc $\lambda M \in \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace-vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5) $f(A) = A.A = A^2$ donc $A \in \mathcal{F}$.

$f(2A) = A.2A = 2A^2 \quad (2A)^2$ or $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$ donc $4A^2 \neq 2A^2$.

Donc $2A \notin \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 3

1. $\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ car $C_3 = C_2$ et $C_4 = C_1 - C_2$

Donc rang(A) = 2 car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. a. $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + d = 0 \\ a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ a - b - b = 0 \\ c = -b \\ 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ -2b = 0 \\ c = -b \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ La famille est libre.

De plus $\text{card}(\mathcal{B}) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, donc c'est une base.

b. Matriciellement : $AU_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(u_1) = 0$

$AU_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(u_2) = 0$ $\quad AU_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u_3) = 2u_3$

$AU_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u_4) = 2u_4 + u_3$ $\quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c. On sait que $A = M_{\mathcal{C}}(f)$. Posons $T = M_{\mathcal{B}}(f)$ (T est bien triangulaire) et $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (inversible car $\mathcal{B}$ est une base).

D'après la formule de changement de base, on a : $A = P.T.P^{-1}$

3. a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A^3$

Donc $4A^2 - 4A = A^3$

b. Pour n = 1 : Avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ $\quad a_1A^2 + b_1A = 0A^2 + 1A = A$.
La propriété est vraie pour n = 1.
Supposons qu'à un rang n, $A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA$
$A^{n+1} = A^nA = (a_nA^2 + b_nA)A = a_nA^3 + b_nA^2 = a_n(4A^2 - 4A) + b_nA^2 = (4a_n + b_n)A^2 - 4a_nA$.
Donc $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$ conviennent.
Conclusion :
En posant : $\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ et $\forall$ n ≥ 1, $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$, on a : $\forall$ n ≥ 1, $A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA$.
4) a. $\forall$ n ≥ 1, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$.
b. Donc (a_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2. Equation caractéristique : $x^2 = 4x - 4$
$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0$ une racine double : 2
Donc il existe deux réels a et b tels que : $\forall$ n ≥ 1, $a_n = (a.n + b)2^n$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 4a_1 + b_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)2 = 0 \\ (2a+b)4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2a + b = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{4} \\ a = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{4}\right)2^n = \dfrac{(n-1)}{2^2}\,2^n = (n-1)2^{n-2}$.
c. $\forall n \geq 1$, $b_n = a_{n+1} - 4a_n = n.2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} = n.2^{n-1} - 2(n-1)2^{n-1} = (n - 2(n-1))2^{n-1} = (2-n)2^{n-1}$

5. $\forall n \geq 1$, $A^n = a_nA^2 + b_nA = (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (2-n)2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} \\ 3(n-1)2^{n-2} + (2-n)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 3(n-1)2^{n-2} + (2-n)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

car $3(n-1)2^{n-2} + (2-n)2^{n-1} = (3n-3)2^{n-2} + (4-2n)2^{n-2} = (n+1)2^{n-2}$

Exercice 4

1. On tire une boule au hasard, donc $X \longrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$. $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

2. Dans la seconde urne, on peut tirer une boule numérotée 1, 2, …, n (si X est égal à n).
Donc $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

3. Si (X = k), on place 1 boule 1, 2 boules 2, …., k boules k. En tout, $1 + 2 + \ldots + k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.

b) Si j ≤ k, il y a j boules 'j', et $\dfrac{k(k+1)}{2}$ boules en tout, donc $P_{(X=k)}(Y=j) = \dfrac{j}{\dfrac{k(k+1)}{2}} = \dfrac{2j}{k(k+1)}$.

Si j ≥ k + 1, il n'y a pas de boules 'j' dans la seconde urne, donc $P_{(X=k)}(Y=j) = 0$.

4. a. $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} = \dfrac{(a+b)k + a}{k(k+1)}$ il suffit que $\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$.

Donc $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b. La famille $(X = k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X = k)}(Y = j) = \sum_{k=1}^{j-1} P(X = k)P_{(X = k)}(Y = j) + \sum_{k=j}^{n} P(X = k)P_{(X = k)}(Y = j) \quad (j \le k \Leftrightarrow k \ge j)$$

$$= 0 + \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n}\frac{2j}{k(k+1)} = \frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ (somme télescopique)}$$

$$= \frac{2j}{n}\frac{n+1-j}{j(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

5. $Y(\Omega)$ est fini, donc Y admet une espérance et

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j.P(Y = j) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j) = \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\left(\frac{(n+1)n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{2n(n+1)}{n(n+1)}\left(\frac{n+1}{2} - \frac{2n+1}{6}\right) = 2\ \frac{3n+3-(2n+1)}{6} = \frac{n+2}{3}$$

6. Si $n \ge 2$: $P((X = 1)\cap(Y = 2)) = 0$ Or $P(X = 1) = \frac{1}{n} \ne 0$ $P(Y = 2) = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \ne 0$.

Donc $P((X = 1)\cap(Y = 2)) \ne P(X = 1)P(Y = 2)$.

Si $n = 1$: les deux lois sont des lois certaines, qui sont indépendantes.

7. a. D'après le théorème de transfert, $E(X.Y) = \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n} i.j.P((X = i)\cap(Y = j))$ (nul si $j > i$)

$$= \sum_{1 \le j \le i \le n} i.j.P(X = i)P_{(X = i)}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i.j.\frac{1}{n}.\frac{2j}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n(i+1)}\sum_{j=1}^{i} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n(i+1)}\ \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} i(2i+1) = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{3n}\left(\frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{3}\left(\frac{4n+2}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.$$

b. $\mathrm{cov}(X, Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{(n+1)}{2}\frac{(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(4n+5) - (n+1)(3n+6)}{18}$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}.$$

Exercice 5

1) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ $\sum_{j=1}^{3} |a_{1,j}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ $\sum_{j=1}^{3} |a_{2,j}| = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\sum_{j=1}^{3} |a_{3,j}| = \frac{4}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 2$

Donc $\|A\| = 2$

2) a) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$

Donc $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$

Donc $\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}|\right) \leq \|A\| + \|B\|$ donc $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

b) Les réels $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ sont tous positifs, donc leur maximum est inférieur à leur somme.

Donc $\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

c) Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i, j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i, j\leq n}$ et si $C = AB = (c_{i,j})_{1\leq i, j\leq n}$ alors

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}, c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

Donc $|c_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|$

$\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(|a_{i,k}|\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}|\right)$

Or $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \leq \|B\|$ donc $\sum_{k=1}^{n}\left(|a_{i,k}|\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}|\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\|B\|\right) \leq \|B\|\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|$

De même, $\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq \|A\|$ donc $\|B\|\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq \|B\|\|A\|$

Donc $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \leq \|B\|\|A\|$ donc $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$

Montrons par récurrence sur k que pour tout entier naturel k, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$:

_ pour k = 0 : $A^0 = I_n$ La somme de chaque ligne de I_n est égale à 1 donc $\|I_n\| = 1$

Or $\|A\|^0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

_ supposons qu'à un rang k, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Alors $\|A^{k+1}\| = \|A^k.A\| \leq \|A\|^k.\|A\|$ d'après le début de la question

et $\|A\|^k.\|A\| \leq \|A\|^k.\|A\|$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $\|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1}$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$