Devoir Surveillé n°4
Mercredi 13 Décembre 2023
3 heures

Exercice 1 – EML 2021

On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ par :

$$\forall x \in D,\ g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

On admet que g est décroissante sur $]2 ; +\infty[$ et que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement une solution α sur l'intervalle $]2;+\infty[$

1) Montrer : $4 < \alpha < 5$.

2) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
def valeur_approchee():
    x=4
    y = 5
    while …
        m = (x + y) / 2
        if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) …
            …
        else :
            …
    alpha=(x+y)/2
    return(alpha)
```

Exercice 2 – d'après EDHEC 2018

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de λ l'équation $A.X = \lambda.X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ n'est pas de Cramer. Déterminer une base de l'ensemble des solutions pour ces valeurs de λ.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :
$f(M) = AM$.

2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) a) Déterminer une base de Ker(f) et vérifier que Ker(f) est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de Im(f).

c) Donner une base de Im(f).

4) Soit $\mathcal{E} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ f(M) = 7M \right\}$.
Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5) L'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ f(M) = M^2 \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 3 – Ecricome 2023

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer le rang de A.

2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$u_1 = (-1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (0, -1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 0, 0, 1)$

On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$.

c. En déduire une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice T de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangulaire telles que $A = P.T.P^{-1}$.

3. a. Calculer A^2, A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.

5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Ecricome 2023

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

a. On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

b. Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j.
On distinguera les cas $j \leq k$ et $j \geq k+1$.

4. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

b. En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$, $P(Y = j) = \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$.

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7. a. Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

b. En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2-1}{18}$.

Exercice 5 – ESSEC II 2023

On définit pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$ c'est-à-dire la plus grande valeur que prend $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ lorsque i décrit $\{1, \ldots, n\}$.

1) Un exemple : Si $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $\|A\| = 2$.

2) Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Établir que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

b. Montrer que $\|A\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

c. Démontrer que, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$ puis que pour tout entier naturel k, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.