Devoir Surveillé n°5 - Correction

Exercice 1

1) $e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^{-x} =_0 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$. Donc $f(x) \sim_0 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

De plus f est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues (dont le dénominateur ne s'annule pas). Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. $\forall u \in [0;n]$ $u \le n$ $\frac{u}{n} \le 1$ $-\frac{u}{n} \ge -1$ $e^{-u/n} \ge e^{-1}$ $\frac{e^{-u/n}}{1+u} \ge \frac{e^{-1}}{1+u}$ (car $1 + u > 0$)

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du \ge \int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u} du$ $u_n \ge \frac{1}{e}[\ln(1+u)]_0^n$

$u_n \ge \frac{1}{e}\ln(n+1)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e}\ln(n+1) = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. a) $\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^n \frac{1}{1+u} du - \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du = \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du$

Posons $x = \frac{u}{n}$ (possible car $n \ne 0$) $u = nx$ $\frac{du}{dx} = n$ $du = ndx$ (le changement est affine donc autorisé)

Quand $u = 0$ $x = 0$ quand $u = n$ $x = 1$. Donc $\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} ndx$

_ sur $[0;1]$ $x \ge 0$ $-x \le 0$ $e^{-x} \le 1$ $e^{-x} - 1 \le 0$ $1 - e^{-x} \ge 0$

$1 + nx > 0$ donc $n\frac{1 - e^{-x}}{1+nx} \ge 0$ donc par positivité de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} ndx \ge 0$

_ sur $]0;1]$ $1 + nx \ge nx$ $\frac{1}{1+nx} \le \frac{1}{nx}$ $\frac{1 - e^{-x}}{1+nx} n \le \frac{1 - e^{-x}}{x} = f(x)$ (car $1 - e^{-x} > 0$)

En 0 : $\frac{1 - e^{-0}}{1 + n\times 0} = 0$ et $f(0) = 1$ donc l'inégalité est vraie également.

Donc par croissance de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} ndx \le \int_0^1 f(x)dx$. Donc $0 \le \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \le \int_0^1 f(x)dx$.

b) En posant $I = \int_0^1 f(x)dx$, on obtient $0 \le [\ln(1+u)]_0^n - u_n \le I$

$0 \le \ln(1+n) - u_n \le I$ $0 \le 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \le \frac{I}{\ln(n+1)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I}{\ln(n+1)} = 0$, donc par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$

$u_n \sim_{+\infty} \ln(n+1)$.

4. Intégration par parties : $\begin{cases} v(u) = e^{-u/n} \\ w'(u) = \frac{1}{(1+u)^2} \end{cases}$ $\begin{cases} v'(u) = -\frac{1}{n} e^{-u/n} \\ w(u) = -\frac{1}{1+u} \end{cases}$ v et w sont de classe C^1 sur $[0;n]$.

Donc $v_n = \left[-\frac{e^{-u/n}}{1+u}\right]_0^n - \int_0^n \frac{1}{n}\frac{e^{-u/n}}{1+u} du = -\frac{e^{-1}}{1+n} + \frac{e^{-0}}{1} - \frac{1}{n}u_n = 1 - \frac{1}{e(1+n)} - \frac{1}{n}u_n$.

$u_n \sim_{+\infty} \ln(n+1)$ donc $\frac{u_n}{n} \sim_{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e(1+n)} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

5. f est continue sur $]0; +\infty[$, donc elle admet des primitives. Soit F une primitive de f.

Alors $g(x) = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$. f est continue sur $]0; +\infty[$, donc F est de classe C^1 sur cet intervalle. Donc g est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ comme différence de fonctions de classe C^1 et

$\forall x > 0$, $g'(x) = 2F'(2x) - F(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\,\dfrac{1 - e^{-2x}}{2x} - \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = \dfrac{1 - e^{-2x} - (1 - e^{-x})}{x} = \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

$= \dfrac{e^{-x}(1 - e^{-x})}{x}$ $\quad e^{-x} > 0 \quad x > 0 \ \ -x < 0$ donc $e^{-x} < 1$ $1 - e^{-x} > 0$ donc $g'(x) > 0$. Donc g est croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geq 1$, $-t \leq -1$ $\ f(-t) = -\dfrac{1}{(-t)^3} = \dfrac{-1}{-t^3} = \dfrac{1}{t^3} = f(t)$

Si $-1 < t < 1$ alors $-1 < -t < 1$ $\ f(-t) = 0 = f(t)$

Si $t \leq -1$, $-t \geq 1$ $\ f(-t) = \dfrac{1}{(-t)^3} = \dfrac{1}{-t^3} = -\dfrac{1}{t^3} = f(-t)$; $\ \forall t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$. f est paire.

2. $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^3}dt$ $\ 3 > 1$ donc l'intégrale converge.

$\dfrac{1}{t^3} = t^{-3} \longrightarrow \dfrac{1}{-2}t^{-2} = -\dfrac{1}{2t^2}$ Soit $T \geq 1$. $\int_1^T \dfrac{1}{t^3}dt = \left[-\dfrac{1}{2t^2}\right]_1^T = -\dfrac{1}{2T^2} + \dfrac{1}{2}$ $\lim\limits_{T \to +\infty} -\dfrac{1}{2T^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Changement de variable : $u = -t \Leftrightarrow t = -u$. Donc $\dfrac{dt}{du} = -1$ "$dt = -du$" $\begin{cases} t = -A \Leftrightarrow u = A \\ t = -1 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$

Donc $\int_{-A}^{-1} f(t)\,dt = \int_A^1 f(-u)(-du) = \int_1^A f(-u)\,du = \int_1^A f(u)\,du$. car f est paire.

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A f(u)\,du = \int_1^{+\infty} f(u)du = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-A}^{-1} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}$. Donc $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

b) D'après les questions précédentes $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2} + 0 + \dfrac{1}{2} = 1$.

4. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

_ si $x \leq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} -\dfrac{1}{t^3}dt$. Soit $A \leq x$. $\int_A^x -\dfrac{1}{t^3}dt = \left[\dfrac{1}{2t^2}\right]_A^x = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2A^2}$.

$\lim\limits_{A \to -\infty} \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2A^2} = \dfrac{1}{2x^2}$. Donc $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$.

_ si $-1 < x < 1$ $\ F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt = \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$.

_ si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \dfrac{1}{2} + 0 - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2x^2}$.

b) La fonction f est paire, donc la fonction $t \longmapsto t.f(t)$ est impaire.

De plus $\int_1^{+\infty} t.f(t)dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ converge car $t > 2$. Donc $\int_0^{+\infty} t.f(t)dt$ converge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt$ converge et vaut 0.

c) $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t}dt$ diverge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ diverge.

Exercice 3

Partie A

1. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est symétrique, donc diagonalisable.

2. a) Si M admet une unique valeur propre λ : comme M est diagonalisable, il existerait une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_3$.

Donc $M = P(\lambda I_3)P^{-1} = \lambda\, PI_3P^{-1} = \lambda I_3$. Or M n'est pas diagonale. Il y a contradiction.
Donc M ne peut admettre une unique valeur propre.
b) M(a, b, c) est diagonalisable, donc admet au moins une valeur propre.
D'après la question 2.a), elle en admet donc au moins deux.
De plus $M(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc elle admet au plus 3 valeurs propres.
Donc elle admet soit deux, soit trois valeurs propres.

Partie B

4. a) $J = M(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$.

$J^2 - 3J = 0_3$ donc $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de J.
b) $X^2 - 3X = X(X - 3)$. Les seules valeurs propres possibles de J sont les racines de P, donc 0 et 3.
_ J n'est pas inversible ($C_1 = C_2 = C_3$) donc 0 est bien valeur propre.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $JX = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = - x - y$ $\quad E_0(J) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une base de $E_0(J)$.

_ $J - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ la matrice n'est pas inversible. Donc 3 est valeur propre.

$(J - 3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \ \ y + z = 0 & \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = z : y = z$

$E_3(J) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Le vecteur est non nul donc forme une base de $E_3(J)$.

c) $\dim(E_0(J)) + \dim(E_3(J)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc J est bien diagonalisable et
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

D'après la formule de changement de base, $J = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. a) $P(aI_3 + D)P^{-1} = aPI_3P^{-1} + PDP^{-1} = aI_3 + J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} = M(a, a, a)$

b) $M(a, a, a) = P(aI_3 + D)P^{-1}$ avec $aI_3 + D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale)

Donc M(a, a, a) a deux valeurs propres : a et a + 3.
c) Avec c = a et b = a : $ab + bc + ca + abc = a^2 + a^2 + a^2 + a^3 = 3a^2 + a^3 = a^2(a + 3)$
$a^2(a + 3) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ et $a + 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow$ les valeurs propres de M(a, a, a) sont non nulles
$\Leftrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre de M(a, a, a)
$\Leftrightarrow$ M(a, a, a) est inversible.
La propriété est vérifiée pour M(a, a, a).

Partie C 6. $C = M(0, 0, c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$.

a) Les deux premières colonnes sont égales, donc C n'est pas inversible. Donc 0 est valeur propre.

b) Soit $\lambda \neq 0$. $CX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + (1 + c)z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ 0 = \lambda(y - x) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x + y + (1 + c)z = \lambda z \end{cases}$

Comme $\lambda \neq 0$ L_2 devient : $y = x$

D'où le système : $\begin{cases} 2x + z = \lambda x \\ y = x \\ 2x + (1 + c)z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = (\lambda - 2)x \\ y = x \\ 2x + (1 + c)(\lambda - 2)x = \lambda(\lambda - 2)x \end{cases}$ L_3 devient : $2x + \lambda x - 2x + c\lambda x - 2cx = \lambda^2 x - 2\lambda x$

donc $0 = \lambda^2 x - 2\lambda x - c\lambda x + 2cx$

Donc $CX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda - 2)\, x \\ (\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$

(ii) λ est valeur propre de C si et seulement si le système n'est pas de Cramer, donc si et seulement si $\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c = 0$.

c) Soit $P(X) = X^2 - (c + 3)X + 2c$

$\Delta = (c + 3)^2 - 8c = c^2 + 6c + 9 - 8c = c^2 - 2c + 9 = c^2 - 2c + 1 + 8 = (c - 1)^2 + 8 \geq 8 > 0$. (on peut aussi étudier le polynôme en c pour trouver son signe).

Donc l'équation admet deux solutions distinctes. De plus $P(0) = 2c \neq 0$ donc 0 n'est pas racine.

C admet 0 comme valeur propre, et 2 autres valeurs propres non nulles. Donc C admet trois valeurs propres distinctes.

7. a. $M(a, a, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+(c-a)+a \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+(c-a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = M(0, 0, c - a) + aI_3$ (ou en résolvant $M(a, a, c) = x.M(0, 0, c - a) + yI_3$)

b. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λ valeur propre de $M(a, a, c) \Leftrightarrow M(a, a, c) - \lambda I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow M(0, 0, c - a) + aI_3 - \lambda I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow M(0, 0, c - a) - (\lambda - a)I_3$ non inversible

$\Leftrightarrow \lambda - a$ valeur propre de $M(0, 0, c - a)$.

$\Leftrightarrow \lambda = a + \lambda'$, avec λ' valeur propre de $M(0, 0, c - a)$.

Comme $M(0,0,c - a)$ a 3 valeurs propres distinctes, par décalage de a, $M(a, a, c)$ a aussi 3 valeurs propres distinctes.

c. Avec $b = a$, $ab + bc + ca + abc = a^2 + ac + ca + a^2c = a^2 + 2ac + a^2c = a(a + 2c + ac)$

$M(a, a, c)$ non inversible $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre de $M(a, a, c)$

$\Leftrightarrow$ $-a$ est valeur propre de $M(0, 0, c - a)$

$\Leftrightarrow$ $-a = 0$ ou $-a$ est racine de $X^2 - (c - a + 3)X + 2(c - a)$ (d'après questions 6. a) et b))

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a^2 + (c - a + 3)a + 2(c - a) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a^2 + ca - a^2 + 3a + 2c - 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $ca + a + 2c = 0$

$\Leftrightarrow a(a + 2c + ca) = 0$

La propriété (*) est bien vérifiée pour les matrices $M(a,a,c)$.