

Devoir Surveillé n°5
Mercredi 31 Janvier 2024
3 heures

Exercice 1

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du.$

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. a) Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel

$$n \text{ non nul : } \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{1 + nx} n \cdot dx.$$

$$\text{En déduire que } 0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

b) En déduire que $u_n \sim_{+\infty} \ln(n+1)$.

$$4. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } v_n = \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{(1+u)^2} du.$$

$$a) \text{ Montrer que } \forall n \geq 1, v_n = 1 - \frac{1}{e(n+1)} - \frac{1}{n} u_n.$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

5. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0, g(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer g' .

b) En déduire le sens de variation de g .

Exercice 2 – D'après Ecricome 2019

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
3. a) A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du$.

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.

- b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

4. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

- a) Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- b) Démontrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.
- c) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f(t) dt$ est-elle convergente ?

Exercice 3 – EML 2021

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\text{Card}(\{a, b, c\})$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.

Par exemple, si $a = b = c$, alors $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 2$.

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite vérifier dans plusieurs situations différentes la conjecture (*) suivante :

$$(*) M(a, b, c) \text{ est inversible} \Leftrightarrow ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.

On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

b) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

Partie B : Cas où $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 1$

4. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0, 0, 0)$.

a) Calculer J^2 . Déterminer alors un polynôme annulateur de J .

b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J .

c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$J = PDP^{-1}.$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier : $M(a, a, a) = P (a I_3 + D) P^{-1}$.

b) En déduire que la matrice $M(a, a, a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a .

c) Vérifier la conjecture (*) pour la matrice $M(a, a, a)$.

Partie C : Cas où $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 2$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.

On note $C = M(0, 0, c)$.

a) Justifier que 0 est une valeur propre de C .

b) Soit λ un réel non nul.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence : $CX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda - 2)x \\ (\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$

(ii) En déduire : λ est une valeur propre de $C \Leftrightarrow \lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c = 0$.

c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

7. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a, a, c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0, 0, c - a)$.

b. En déduire que la matrice $M(a, a, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

c. Vérifier la conjecture (*) pour la matrice $M(a, a, c)$.